



# POR QUE A MATEMÁTICA INTERESSA À BIOLOGIA?

Jobson de Queiroz Oliveira

---

Doutor em Matemática pela UFC  
Professor da Licenciatura em Matemática da  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da UECE  
[jobson.oliveira@uece.br](mailto:jobson.oliveira@uece.br)

## Resumo

Neste trabalho abordamos a relação entre Biologia e Matemática. Na primeira seção descrevemos uma questão antiga da Filosofia da Matemática: a questão da descoberta ou invenção da Matemática, em particular abordamos o Platonismo, representado por Kurt Gödel e o Formalismo, representado por David Hilbert, apresentando um panorama histórico da discussão. Em seguida discutimos a questão do funcionamento da Matemática como linguagem para descrever o universo, passando de noções abstratas à descrição de fenômenos no mundo real. Apresentamos alguns exemplos de modelos matemáticos. Por fim apresentamos algumas das várias aplicações modernas da Matemática à Biologia, incluindo o estudo de epidemias, genética das populações e crescimento de organismos.

**Palavras-chave:** Biologia. Matemática. Modelagem matemática.

## Abstract

In this work we approach the relationship between Biology and Mathematics. In the first section, we describe an old question from the Philosophy of Mathematics: the question of the discovery or invention of Mathematics, in particular we approach Platonism, represented by Kurt Gödel and Formalism, represented by David Hilbert, bringing down a historical panorama of the discussion. Then we discuss the question of how Mathematics works as it speaks to the universe, moving from abstract notions to the description of phenomena in the real world. We present some examples of mathematical models. Finally, we present some of the many modern applications from mathematics to biology, including the study of epidemics, population genetics and growth of organisms.

**Keywords:** Biology. Mathematics. Mathematical models.

## 1 Introdução

Nos últimos anos a pesquisa científica tem se beneficiado da interdisciplinaridade, isto é, o uso de teorias e técnicas de uma certa área do conhecimen-

to aplicadas a outras áreas (situação inclusive estimulada nos currículos da Educação Básica). Nesse contexto, a Matemática tem surgido como ferramenta de trabalho das mais variadas áreas, desde a Física, mais antiga das relações, até as chamadas Ciências Sociais, desde a óbvia aplicação à Economia até as surpreendentes aplicações em Psicologia.

O primeiro exemplo das aplicações da Matemática à Biologia, normalmente apresentado no Ensino Médio, é o de Mendel usando probabilidade nos seus estudos de Genética. No Ensino Superior, a interface entre Matemática e Biologia é geralmente apresentada nos cursos de graduação como aplicações de equações diferenciais ordinárias a tópicos como crescimento populacional, relação predador-presa etc. Outros exemplos de aplicações aparecem na Biologia Molecular, Biologia Celular, Biologia Evolutiva e Epidemiologia.

Em geral, o problema do diálogo entre matemáticos e biólogos é de tradução: o biólogo raramente consegue formular um problema que interesse ao matemático, ao mesmo tempo que o matemático não sabe que tipo de conclusões sobre o problema o biólogo considera relevantes. Isso se dá em grande parte pelo tipo de linguagem utilizadas por cada uma das disciplinas. *Grosso modo*, enquanto a Matemática lida com abstração, problemas "irreais" (não práticos) e tem como foco a demonstração e previsibilidade (na maioria dos casos), a Biologia se ocupa de pensamentos práticos e problemas reais, sempre lidando com o indeterminismo inerente aos seres vivos (devido à complexidade de organismos e sistemas).

## 2 A natureza matemática

O platonismo em Matemática é a concepção segundo a qual a Matemática existe, independentemente dos seres humanos. Segundo esta visão a Matemática é descoberta pelos pesquisadores, e esta é a razão dela funcionar tão bem como descrição dos fenômenos naturais: o universo impõe a Matemática à humanidade. Essa existência independente da Matemática é comparável a uma paisagem. Para o matemático Rudy Rucker os objetos matemáticos ocupam uma espécie de "espaço mental" chamado *psicorama*. O pesquisador em Matemática seria um tipo de explorador desse espaço tal qual um explorador numa selva, desbravando territórios desconhecidos, abrindo novas passagens e conhecendo novas realidades. Cada explorador, ao passar por uma "paisagem" tem sua própria descrição da mesma, ou seja, cada explorador dá um relato diferente das suas descobertas. Isso explica o fato de dois pesquisadores, ao abordar o mesmo assunto, conseguirem resultados (teoremas) diferentes. Penrose (1989, p. 111) escreve

Esses conceitos matemáticos muitas vezes parecem algo de uma realidade profunda, algo que vai bastante além das deliberações de qualquer matemático particular. É como se o pensamento humano fosse guiado em direção a uma verdade externa e eterna – verdade que tem sua realidade própria e que a qualquer um de nós só é revelada parcialmente.

No entanto, existe uma outra visão sobre a Matemática, a de que ela é criada, sendo simplesmente um produto do intelecto humano, sem qualquer relação direta com os fenômenos naturais, quando há uma estrutura matemática

que descreve algum fenômeno natural isto é visto com indiferença ou, no máximo, como uma feliz coincidência. Essa visão da Matemática é representada pelo Formalismo de David Hilbert e seu programa de mecanização de provas matemáticas. Tal programa consistia de dois objetivos principais: a Matemática deveria ser capaz de responder a qualquer pergunta, ou seja, decidir se uma sentença é verdadeira ou falsa, e ser livre de inconsistências, isto é, não deveria ser possível provar, ao mesmo tempo, que uma sentença é verdadeira e falsa, evitando dessa forma os paradoxos. O exemplo a seguir ilustra a diferença entre formalistas e platonistas.

A afirmação "2 é o único primo par" é verdadeira ou falsa? Algebricamente tal afirmação é verdadeira, mas no sentido absoluto isso também ocorre? Isto é, ela é verdadeira independentemente de uma mente inteligente que a formule? Em outras palavras, ela era verdadeira antes da invenção ou descoberta dos números primos? O platonista dirá que sim ao passo que o formalista afirmará que tal pergunta carece de sentido.

No início do século XX, Bertrand Russell mostrou ser possível expressar paradoxos matematicamente. Os paradoxos eram conhecidos desde a Antiguidade e foi com o intuito de evitá-los que a Escola Formalista de Hilbert tentou axiomatizar todo o corpo do conhecimento matemático, sugerindo assim a ideia de que todo problema matemático fosse solúvel. Durante as duas primeiras décadas do século XX vários matemáticos se dedicaram a execução do programa de Hilbert. No entanto, o programa teve seu fim em 1931, quando Kurt Gödel escreveu um artigo intitulado *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Ma-*

*thematica und verwandter Systeme* (Sobre as proposições indecidíveis no *Principia Mathematica e sistemas relacionados*). Gödel mostrou ser impossível a tarefa à qual se propunha a Escola Formalista. O Primeiro Teorema de Incompletude afirma que em todo sistema formal pode-se construir uma sentença que, quando interpretada intuitivamente, afirma ser ela própria não demonstrável.

**Teorema:** Se o conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então existem teoremas que não podem ser nem provados nem negados.

O fato notável na demonstração é a construção explícita de uma afirmação verdadeira que não pode ser demonstrada. Em particular, Gödel demonstrou que qualquer sistema axiomático que contenha a Aritmética não pode ser completo (um sistema axiomático é um conjunto de sentenças, denominadas axiomas, dos quais se deriva, de acordo com regras bem definidas chamadas regras de inferência, outras sentenças, denominadas teoremas. Um sistema axiomático é dito consistente se não é possível derivar, a partir dos axiomas, via as regras de inferência previamente fixadas, uma proposição e sua negação. Um sistema formal qualquer  $P$  é dito completo se todas as fórmulas de  $P$  são demonstráveis nele próprio). Gödel acreditava que uma consequência dos seus teoremas de incompletude era a existência autônoma das verdades matemáticas indemonstráveis, confirmando assim o seu platonismo.

A genialidade do argumento de Gödel, hoje chamado de aritmetização de Gödel, é algo singular. Para uma discussão completa da prova recomenda-se o livro *A Prova de Gödel*, de Nagel e Newman.

O segundo teorema afirma que a consistência de um sistema formal não pode ser provada usando apenas a axiomática do próprio sistema.

**Teorema:** Não existe procedimento construtivo que prove ser consistente a teoria axiomática.

Em 1960, o físico Eugene Wigner escreveu um artigo intitulado *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences (A implausível eficácia da Matemática nas Ciências Naturais)*. Neste artigo, Wigner se mostra admirado com o fato de estruturas matemáticas abstratas, construídas sem nenhuma relação com qualquer fato de natureza real ou concreta servirem aos físicos como ferramenta de predição e generalização de fenômenos do universo físico. Um exemplo notável, citado por Wigner, dessa relação aparece na Mecânica Quântica, que usa números complexos, cuja invenção como se deu como resposta a uma pergunta puramente algébrica, para descrever com muito sucesso, juntamente com a estrutura formal de espaços de Hilbert, os fenômenos subatômicos. Outro exemplo dessa utilização é a Geometria Riemanniana, criada por Bernhard Riemann (1826-1866) como uma generalização da geometria euclidiana e que foi utilizada por Albert Einstein (1889-1955) na formulação da Teoria da Relatividade. Em resumo, as duas teorias mais robustas e da Física do século XX utilizam

estruturas matemáticas abstratas, cuja criação jamais pretendeu qualquer aplicação prática inicial. Ressalte-se ainda o fato de que, tanto a Mecânica Quântica quanto a Teoria da Relatividade, essenciais para o desenvolvimento tecnológico experimentado pela humanidade nas últimas décadas, foram exaustivamente testadas desde a sua criação e até o momento todas as suas previsões foram confirmadas. Uma discussão mais abrangente sobre a natureza da Matemática e sua relação com a estrutura da realidade pode ser encontrada em *A essência da realidade*, de David Deutsch.

### **3 Sorriso sem gato (abstrato *versus* real)**

Os registros históricos mais antigos conhecidos do uso da Matemática são devidos aos babilônios e egípcios. Estes povos utilizavam a matemática como ferramenta para a resolução de problemas associados à medição de terras e cobrança de impostos (o papiro de Rhind, datado de 1650 a. C., descreve a solução de 85 problemas envolvendo aritmética, frações, cálculo de áreas e volumes, regra de três e equações lineares, trigonometria e geometria). Não havia métodos gerais de resolução de problemas, cada um era tratado de maneira individual. Além disso, não era utilizada uma linguagem simbólica que auxiliasse na abordagem dos problemas, as soluções, apresentadas como uma espécie de receita eram quase sempre textuais. Foi com os gregos que a Matemática adquiriu um caráter mais teórico e científico, a partir da utilização de argumentos ló-

gico-dedutivos, introduzindo a noção de demonstração e a abstração dessa forma distanciando-se do caráter eminentemente aplicado da Matemática dos egípcios e babilônios. Uma contribuição formidável foi dada por Euclides (300 a. C.) que na sua obra *Os Elementos* compilou toda a matemática conhecida até então, apresentando-a de maneira unificada, com o objetivo de apresentar a Teoria dos Sólidos de Platão e a Teoria dos Números de Teeteto. Euclides ficou famoso pela concepção do livro em si, considerado como o primeiro tratado científico, modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas. Vale ressaltar que muitos outros povos desenvolveram sua própria Matemática, atingindo avanços surpreendentes como os chineses e hindus.

Ao longo de sua história, a Matemática atingiu níveis cada vez mais altos de abstração. O progresso em Matemática sempre decorre da criação de novos conceitos que muitas vezes englobam conceitos antigos. Tal situação ocorre, por exemplo, com os números. Inicialmente, tinham-se os números naturais (1, 2, 3, ...). Logo se percebeu que tais números eram insuficientes, pois existiam os chamados segmentos incomensuráveis (dois segmentos AB e CD são ditos comensuráveis se existe um terceiro segmento EF de modo que é possível medir AB e CD, ao mesmo tempo, com EF, ou seja, se EF "cabe" m vezes em AB e n vezes em CD). O exemplo mais famoso de segmentos incomensuráveis é dado pelos lados e pela diagonal de um quadrado de lado 1, cuja diagonal é  $\sqrt{2}$  (basta aplicar o Teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo cujos catetos medem 1). A criação do zero (conceito de vazio), dos números negativos (conceito de dívida),



racionais (divisão), irracionais (segmentos incomensuráveis) sempre correspondeu a uma necessidade de ampliação do conceito de número para a solução de problemas. Até os números reais existia uma associação concreta, pois pode-se estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto dos números reais. A partir dos estudos de Tartaglia sobre a equação do terceiro grau, percebeu-se a necessidade da criação de novos números, em particular em resposta à seguinte pergunta: qual é a raiz quadrada de -1? A solução encontrada foi a definição do número imaginário  $i$ , cuja propriedade fundamental é que  $i^2 = -1$ . Tal solução levou à criação dos números complexos, que não possuem nenhum correspondente no mundo real da experiência cotidiana, mas que, no século XX, encontrou aplicações na Física Quântica.

O exemplo acima é um dos muitos que envolvem a abstração. Por vezes tal processo de abstração foi alvo de críticas, uma das mais famosas, e por vezes desconhecida, sendo devida ao famoso autor infantil Lewis Carrol. Em seu famoso livro *Alice no País das Maravilhas*, lançado em 1865, o autor apresenta um personagem bastante singular chamado Gato de Chesire, um gato falante que, por algum motivo, está sempre rindo e que pode aparecer e desaparecer a seu bel prazer. Mais ainda, quando desaparece, a última parte dele a sumir é seu sorriso. Uma das tiradas famosas de Alice no livro acima diz respeito a isso: "já vi gato sem sorriso, mas nunca vi sorriso sem gato". O autor, Lewis Carroll, pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), foi professor de Matemática na prestigiosa Universidade de Oxford. O livro, ao mesmo tempo em que divertia crianças, satirizava os colegas matemáticos de Dodgson e se comu-

nicava com eles. Segundo estudiosos da obra de Carroll, o misterioso “sorriso sem gato” é uma metáfora que remete ao caráter abstratizante da Matemática moderna, que prefere definições que desnudem os conceitos de quaisquer atributos considerados desnecessários. Vale ressaltar que tal abstração ganhou, desde os dias de Carroll até hoje, mais e mais complexidade.

Antes não fazia sentido falar do número dois isoladamente. Sempre se pensava em termos concretos, fazendo-se a correspondência entre o número e o objeto. Por exemplo, havia apenas dois sapatos, dois cavalos, duas maçãs, etc. Agora, *abstraiamos*, ou seja, separamos o conceito do número dois dos conjuntos de dois elementos. O número dois sem estar associado a um par de objetos em particular é o “sorriso sem gato”, flutuando no espaço sem se ligar a nada. Dessa forma, as definições perdem seu apelo intuitivo e se tornam mais difíceis de entender por soarem estranhas e artificiais. Com o excesso de abstração, a linguagem se torna tão afetada e os problemas tão formais que pode parecer que ele está em um outro mundo que não é exatamente um “país das maravilhas”. Podemos citar como exemplo de tal abstração o conceito, surgido na década de 1930, de variedade, uma abstração do conceito de superfície que prescinde de um espaço ambiente que a contenha. A noção intuitiva de superfície é simples de compreender ao se falar, por exemplo, da superfície de uma bola de futebol. Sempre que pensamos numa bola de futebol ela está contida no espaço tridimensional da nossa experiência cotidiana ao passo que uma variedade é uma “superfície” sem necessidade de espaço que a contenha, ou seja, ela em si mesma é o espaço. O uso da abstração faz com que aspectos das definições que as

restringiriam a objetos específicos sejam descartados. Por isso, não precisamos redefinir as relações para cada tipo de objeto. Outra vantagem da forma moderna de definir objetos da Matemática é que o emprego de linguagem formal muito precisa que, na mesma medida de sua artificialidade, elimina as ambiguidades da linguagem cotidiana. Passemos agora ao mundo real.

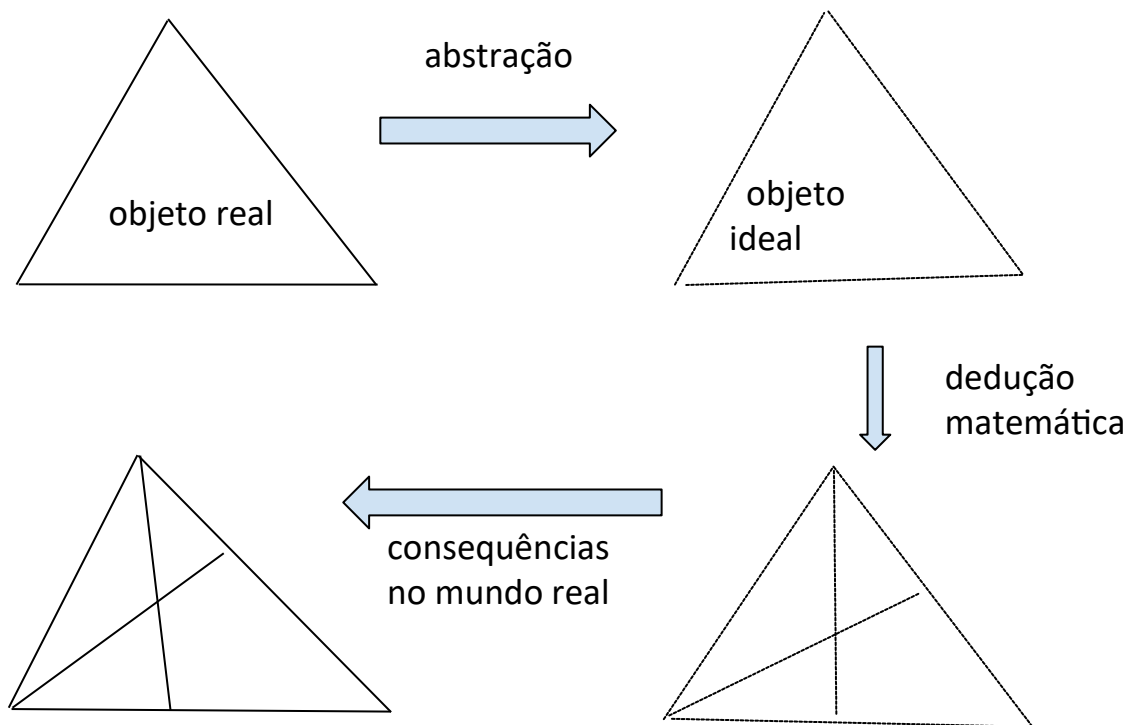
A despeito da complexidade do mundo ao nosso redor, dois fatos chamam a atenção: a regularidade e a invariância das leis da natureza. Tais fatos desconcertantes é que permitem que haja o desenvolvimento da Ciência pois, se a cada medição ou repetição um experimento se mostrasse diferente não seria possível desenvolver explicações racionais para tais fenômenos. Portanto as leis da natureza são invariantes donde é natural que sejam descritas matematicamente, uma vez que a Matemática é determinística. Nas palavras do matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827): "dê-me as condições iniciais do sistema e eu direi o seu estado e comportamento em qualquer tempo futuro". O matemático em geral não se vê envolvido com fenômenos naturais em suas investigações, ele simplesmente pensa num problema que julga interessante ou desafiador. A motivação para a pesquisa matemática é normalmente autocontida: vez por outra um problema físico dá início à pesquisa para, uma vez formulado matematicamente o problema, ser imediatamente esquecido. Um fator preponderante nessa questão é o desconhecimento que os pesquisadores de uma determinada área tem com relação às outras áreas, chegando por vezes as raias da total ignorância.

A Matemática, em particular após o surgimento do Cálculo Diferencial, devido a Newton e a Leibniz, surge como a linguagem adequada para descrever fenômenos naturais, pois quase tudo na Natureza é mudança, estados imutáveis são raros (e mesmo nesses casos a Matemática serve como linguagem). Ocorre que o grau de complexidade ao traduzir matematicamente essas mudanças no nível biológico é demasiado elevado. Em geral é necessária uma aproximação e sucessivos refinamentos dessa aproximação para descrever fidedignamente os fenômenos biológicos.

Ao formular seus problemas a Biologia o faz em uma linguagem não-matemática. Os fenômenos e processos estudados pelos biólogos são, em sua maioria, abordados utilizando métodos e técnicas completamente estranhos aos matemáticos. Por conta da natureza desses métodos faz-se necessária uma adaptação ou tradução da linguagem biológica para a linguagem matemática.

A "tradução" da linguagem biológica para a matemática se faz através de modelos matemáticos. A partir da abstração da situação, parte-se de modelos simples, obtendo-se uma descrição parcial do fenômeno biológico que se deseja estudar. Este processo permite tornar o problema que se deseja estudar tratável do ponto de vista matemático, tornando possível o uso de várias ferramentas matemáticas para a solução. Uma vez obtida a solução matemática do problema, deve-se interpretar tal solução em termos biológicos: ela é possível? Há sentido biológico na resposta matemática? Já observamos que tais modelos, no entanto, não conseguem englobar toda a complexidade inerente à vida e seus diversos mecanismos. Isso se dá em parte pelo próprio procedimento de modela-

gem, que é reducionista. Por vezes é necessário um aprimoramento do modelo ou remodelagem, adicionando mais parâmetros de modo a melhorar a descrição do fenômeno. No entanto, a adição de mais variáveis ao problema pode levar a um modelo não exequível do ponto de vista matemático ou mesmo do biológico, pois é necessário que a correlação entre todos os parâmetros do modelo seja conhecida. Ou seja, realizar uma modelagem matemática não significa produzir os modelos descritivos mais compreensíveis ou fidedignos à realidade, mas sim produzir modelos que sejam suficientemente simples e que incorporem as principais características do fenômeno estudado. Pode parecer contraditório, mas um modelo que leva mais variáveis em consideração não necessariamente é melhor ou mais “realístico”. Na verdade, se um modelo leva mais variáveis em consideração do que outro e ambos têm a mesma eficiência, o segundo modelo é considerado melhor, levando em conta a chamada Navalha de Occam: Se em tudo o mais forem idênticas as várias explicações de um fenômeno, a mais simples é a melhor.



Passemos agora à descrição de alguns desses modelos matemáticos.

#### 4 Aplicações da matemática à biologia

Em seu famoso livro *A arte de resolver problemas*, Polya (2006, p. xix-xx) apresenta um esquema onde afirma que a solução de um problema, matemático ou não, se dá em quatro etapas:

1. Compreensão do problema;
2. Estratégia(s) de solução;
3. Aplicação da(s) estratégia(s);
4. Verificação da validade da solução

Compreender um problema significa, dentre outras coisas, traduzi-lo em uma linguagem científica (que varia de acordo com a área do pesquisador). Neste ponto reside uma grande dificuldade da modelagem matemática de fenômenos biológicos: como expressar matematicamente o problema e como interpretar biologicamente a resposta matemática do problema. Sobre isso temo que

um modelo é uma simplificação abstrata que permite gerar previsões sobre o comportamento de um sistema sob diferentes condições e desvendar o papel desempenhado pelos vários componentes do sistema nesses comportamentos (FRIEDMAN, 2004, p. 799).

A elaboração de um modelo, que é exatamente a "compreensão" de um problema, depende do fenômeno que se quer estudar. A consideração, ou não, de certos parâmetros é crucial para a elaboração do modelo. Parâmetros demais podem levar a elaboração de um modelo cuja solução seja demasiado difícil ou impossível. Parâmetros de menos podem gerar um modelo por demais simplificado que não gerará soluções realistas. Os parâmetros escolhidos podem ou não depender do tempo. Em caso afirmativo eles são chamados de variáveis de estado. Os dados experimentais também constituem uma parte importante do modelo e são chamados de parâmetros construtivos. Em resumo, um modelo representa a evolução temporal das variáveis de estado a partir dos parâmetros construtivos. Em notação matemática escrevemos:  $x' = F(x, \lambda, t)$ , onde  $x$  representa a(s) variável(is) de estado e  $x'$  representa a sua variação temporal (ou derivada, em linguagem matemática),  $\lambda$  representa os parâmetros construtivos e  $t$  representa o tempo.  $F$  é a função que relaciona essas grandezas entre si ( $x' = F(x,$

$\lambda, t$ ) é chamada de equação diferencial). A seguir apresentamos o primeiro exemplo de que se tem notícia da solução de um problema biológico relevante usando Matemática: a propagação da varíola.

#### 4.1 Vacinação

Em 1760, Daniel Bernoulli apresentou à Academia de Ciências da França um artigo intitulado *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*. O trabalho de Daniel Bernoulli tinha como objetivo avaliar a eficácia de um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era, na época, uma grande ameaça à saúde pública. Bernoulli apresentou um modelo tão consistente que ainda hoje pode ser aplicado, igualmente bem, a qualquer outra doença que, se uma pessoa a contrai e sobrevive, tem imunidade para o resto da vida.

Utilizando dados fornecidos por Edmund Halley, Bernoulli foi capaz de construir uma curva de sobrevivência para a população suscetível à varíola. Considerando pessoas de 0 a 25 anos ele calculou, para cada faixa de idade, a proporção da população não infectada e, portanto, suscetível a infecção. Bernoulli assumiu que a probabilidade de contrair varíola, para qualquer indivíduo suscetível com qualquer idade era constante e igual a 12.5%. Além disso, ele também supôs que a taxa de mortalidade, independentemente da idade dos indivíduos, era também de 12.5%. Admitindo uma taxa de 1300 recém-nascidos inoculados no nascimento, Bernoulli conseguiu comparar a tabela de sobrevi-



vência da linha de base de Halley com a de uma população em que a varíola foi completamente erradicada.

Após analisar os dados fornecidos por Halley, a modelagem de Bernoulli para a propagação da varíola era dada pelas equações diferenciais a seguir, que apresentaram a evolução temporal da varíola na população susceptível:

$$dS/dt = -aS - mS, (1)$$

$$dN/dt = -\mu aS - mN, (2)$$

$$dR/dt = a(1 - \mu)S - mR, (3)$$

Sendo que  $S(t)$  é a população de susceptíveis à doença no instante  $t$ ,  $N(t)$  é a população total,  $a$  é a constante associada à taxa contaminação dos susceptíveis,  $\mu$  é a proporção de susceptíveis que morrem por consequência da doença,  $m$  é a constante associada à taxa de morte natural e  $R(t)$  representa as pessoas que sobreviveram a doença, as quais se tornaram imunes.

Baseado no modelo que acabamos de descrever e usando os melhores dados possíveis sobre mortalidade disponíveis na época, Bernoulli estimou que  $a = (1/8) \text{ ano}^{-1}$  e  $\mu = 1/8$ . Usando esses valores a conclusão de Bernoulli foi que se as mortes por varíola pudessem ser eliminadas, poder-se-ia adicionar aproximadamente 3 anos à vida média esperada (em 1760) da população que era de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de vacinação. Durante esse período ele se envolveu em uma discussão com outro famoso matemático de sua época, Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), sobre a interpretação dos riscos relativos

de morte por varíola e variolação. D'Alembert afirmava que os riscos reais deste último eram 17 vezes maiores do que os da própria varíola. No entanto, ele acabou moderando suas objeções e o artigo foi finalmente publicado em 1766. Uma discussão completa e mais técnica no artigo de Bernoulli pode ser encontrada no artigo de Glomski e Ohanian intitulado *Eradicating a Disease: Lessons from Mathematical Epidemiology*.

O modelo de Bernoulli apresentou resultados que influenciaram as políticas de saúde pública, trazendo imunidade aos indivíduos através da inoculação do vírus obtido nas pessoas infectadas, reduzindo a taxa de mortalidade através da vacina. Os benefícios potenciais da variolação tornaram-se irrelevantes dentro de 3 décadas, quando Jenner demonstrou a segurança da vacina contra a varíola bovina na Inglaterra em 1796.

#### 4.2 Genética das Populações

A genética das populações tem início com o artigo de G. H. Hardy intitulado "*Mendelian proportions in a mixed population*". O artigo de Hardy é pioneiro, pois aborda, de maneira totalmente nova, um assunto à época controverso, a Teoria da Evolução. Usando ideias simples, ele foi capaz de enunciar um teorema que afirma que se nenhum fator evolutivo atuar em uma determinada população sujeita a certas condições, então a frequência dos seus alelos permanecerá constante ao longo do tempo. É curioso que Hardy, um matemático que se gabava de nunca ter escrito nenhum trabalho que tivesse aplicação prática, te-

nha se ocupado de tal problema. Ele escreve no início de seu artigo, que ele classificou como muito simples:

Estou relutante em me intrometer numa discussão de assuntos nos quais eu não tenho experiência ou conhecimento, e eu deveria esperar que o ponto muito simples que eu desejo fazer fosse familiar aos biólogos. De qualquer maneira, alguns comentários do sr. Undy Yule, para quem o sr. R. C. Punnett chamou minha atenção, sugerem que isso ainda vale a pena ser feito...

De maneira independente o médico Wilhelm Weinberg chegou às mesmas conclusões de Hardy. Ele apresentou suas ideias numa palestra em 13 de janeiro de 1908, alguns meses antes da publicação do artigo de Hardy. Os resultados de Weinberg foram publicados no fim de 1908. Por muitos anos o resultado foi creditado apenas a Hardy. Um dos motivos apontados para tal injustiça seria o fato de Weinberg ter escrito seu artigo em alemão, pouco conhecido dos falantes de língua inglesa. Uma discussão, em inglês, sobre tais motivos pode ser encontrada no artigo *Weinberg and language impediments*, de J. F. Crow.

Podemos enunciar o teorema de Hardy-Weinberg para o equilíbrio gênico de uma população:

**Teorema:** Seja uma população satisfazendo as seguintes condições:

- a. A população deve ser suficientemente grande, de modo que possam ocorrer todos os tipos de cruzamento possíveis, de acordo com as leis de probabilidades.

- b. A população deve ser panmítica, isto é, os cruzamentos entre indivíduos de diferentes genótipos devem ocorrer ao acaso, sem qualquer preferência.

Se não houver mutação, seleção ou migração nesta população, então ela permanecerá em equilíbrio gênico, ou seja, as frequências dos alelos não sofrerão alterações ao longo das gerações.

O princípio de Hardy-Weinberg – também conhecido como "Primeira Lei de Newton da Evolução" – assevera que na ausência de fatores evolutivos, as frequências gênicas se mantêm constantes em uma população teórica. É claro que sempre há fatores evolutivos em ação nas populações reais tais como migração, mutação dentre outros. No entanto, a lei de Hardy-Weinberg é importante porque permite determinar quanto e como o equilíbrio de uma população está sendo afetado pelos fatores evolutivos. Em seu argumento, que Hardy considera quase trivial, ele concluiu que as frequências genotípicas são dadas pela expressão:

$$(p + q)^2 = 1,$$

onde  $p$  é a frequência do alelo dominante e  $q$  é a frequência do alelo recessivo. Desenvolvendo a expressão, obtemos  $p^2 + 2pq + q^2 = 1$  onde  $p^2$  é a frequência do genótipo homocigoto dominante,  $2pq$  é frequência do genótipo heterocigoto e  $q^2$  é a frequência do genótipo homocigoto recessivo.

#### 4.3 Por que não existem gigantes?

Galileu Galileu – o grande físico, astrônomo e matemático – ocupou-se extensivamente dessa pergunta no seu livro *Dois Novas Ciências*. Nesse trabalho, ele mostrou que, ao mudar a escala de um objeto, seu volume aumenta com o cubo da razão de semelhança  $\lambda$ , enquanto a área de sua superfície ou de uma seção transversal qualquer do sólido aumenta com o quadrado de  $\lambda$ . Esse resultado é conhecido como Lei do Quadrado-Cubo, nome pouco apropriado porque não é uma lei da Natureza, mas um teorema da Geometria.

Para ilustrar o resultado suponha dado um cubo de lado 1cm. O volume de um cubo é dado pelo produto de seu comprimento, largura e altura, neste caso então seu volume será de  $1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ cm}^3$  e a área da sua base será de  $1\text{cm}^2$ . Agora considere um cubo de lado 2 cm. O volume deste novo cubo será  $2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ cm}^3$  e a área de sua base será de  $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$ . Ou seja, ao dobrar o lado de um cubo aumentamos a sua área da base em 4 vezes e o seu volume 8 vezes.

O problema é que a Lei do Quadrado-Cubo tem consequências trágicas para os gigantes. De fato, ao aumentar as proporções de um ser humano, sua massa (volume) aumenta com o cubo de sua altura enquanto a área da seção transversal de cada um de seus ossos aumenta com o quadrado. Mas a resistência dos ossos (sua capacidade de suportar tensão), é proporcional às suas seções transversais, logo, os ossos de um gigante se quebrariam pela ação de seu próprio peso. E os efeitos da Lei do Quadrado-Cubo se fazem sentir por toda parte.

Uma outra aplicação da Lei do Quadrado-Cubo aparece na relação superfície-volume. Novamente considerando um cubo de lado 1cm, a área de sua superfície é a soma das áreas dos seus lados, ou seja, um cubo de lado 1cm tem  $6 \text{ cm}^2$  de superfície e, já sabemos,  $1 \text{ cm}^3$  de volume, daí obtemos que a relação superfície- volume desse cubo é  $6/1=6$ . Se considerarmos o cubo de lado 2 cm, sua área de superfície será de  $6 \times 4=24 \text{ cm}^2$  e seu volume é de  $8 \text{ cm}^3$ . A relação superfície-volume para este cubo é de  $24/8= 3$ . De fato, vale que quanto menor for o corpo maior será a relação superfície-volume desse corpo. No caso de bebês, a Lei do Quadrado-Cubo faz com que a relação superfície-volume seja maior nos bebês e demais filhotes e, assim, eles perdem mais calor. Em consequência disso, animais de sangue quente, como os seres humanos, não podem nascer muito menores que seus pais (compare por exemplo, um bebê humano com um filhote de jacaré) para não aumentar em demasia a relação superfície- volume. Além disso, para manter a temperatura corporal constante, esses animais tendem a nascer mais arredondados e com extremidades mais curtas, compensando, assim, a Lei do Quadrado-Cubo: dentre os sólidos de mesmo volume, as esferas têm a menor área superficial. Os jacarezinhos, no entanto, são jacarés adultos em miniatura.

O mesmo ocorre com células. Quando o raio de uma esfera cresce, o seu volume cresce mais rapidamente que a área da superfície desta. Basta lembrar que o volume da esfera de raio  $r$  é dado por  $\frac{4}{3} \pi r^3$ , enquanto que a área da esfera é dada por  $4 \pi r^2$ , portanto a relação superfície-volume da esfera é  $3/r$ , que diminui à medida que o raio  $r$  cresce. Imagine uma criatura unicelular como

uma bactéria. Ela absorve todo o seu oxigênio e alimento através de sua superfície celular que atua ao mesmo tempo como um intestino e pulmões, servindo tanto para absorção de nutrientes e oxigênio quanto para eliminação de dejetos. Se o tamanho da bactéria crescer em demasia ela não seria capaz de sobreviver. A razão disto está na geometria: o volume da bactéria cresce mais rapidamente do que a área da sua superfície. Desta forma, a superfície externa não seria capaz de sustentar um fluxo de nutrientes e oxigênio em quantidade suficiente para sustentar as exigências internas, cujo funcionamento, devido ao aumento de volume da bactéria, demandaria mais nutrientes e oxigênio. A mesma ideia se aplica a qualquer tipo de célula. Isso explica o fato de que apesar de um elefante ser muito maior do que um rato, suas células têm aproximadamente o mesmo tamanho, pois elas não poderiam crescer demais.

## 5 Considerações finais

O debate sobre a natureza dos objetos matemáticos, e da própria Matemática continua bastante ativo ainda nos nossos dias. A pesquisa em Matemática tem levado a conceitos cada vez mais gerais e abstratos, ao mesmo passo em que novas aplicações de velhos e novos conceitos, nas mais diversas áreas, aparece com frequência. Isso cria mais argumentos de lado a lado da discussão.

Diante de todas as situações descritas aqui vemos que, a despeito da dificuldade de "traduzir" a complexidade biológica em termos matemáticos, as pos-

sibilidades de abordagem matemática que permitem solucionar vários tipos de problemas mais que justificam o seu uso pelos biólogos. Aqui apenas arranhamos a superfície do assunto. Há muito mais aplicações que não descrevemos. O caminho inverso também é verdadeiro, sendo uma área pouco explorada pelos matemáticos, a Biologia oferece vários problemas interessantes e desafiadores para a Matemática, indicando muitas direções para desenvolvimentos futuros.

**Agradecimento:** O autor gostaria de agradecer ao professor Maxwell Morais de Lima Filho pelo convite para escrever este artigo.

### Referências

BERNOULLI, D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *In: ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. Histoire de l'Academie Royale des Sciences.* Paris: L'Imprimerie Royale, 1766, p. 1-45.

CARROL, L. *Aventuras de Alice no país das maravilhas & Através do espelho.* Tradução de Maria Luiza X. De A. Borges. São Paulo: Zahar, 2016.

CROW, J. F. Hardy, Weinberg and language impediments. *Genetics*, v. 152, n. 3, p. 821-5, 1999.

DEUTSCH, D. *A essência da realidade.* Tradução de Brasil Ramos Fernandes. São Paulo: MAKRON Books, 2000.

EUCLIDES. *Os elementos.* Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.



FRIEDMAN, N. Inferring cellular networks using probabilistic graphical models. *Science*, v. 303, n. 6, p. 799-805, 2004.

GALILEI, G. *Dois novas ciências*. Tradução de Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda. São Paulo: Nova Stella, 1988.

GLOMSKI, M. & OHANIAN, E. Eradicating a Disease: Lessons from Mathematical Epidemiology. *The College Mathematics Journal*, v. 43, n. 2, p. 123-32, 2012;

GÖDEL, K. Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, v. 38, p. 173-98, 1931.

HARDY, G. H. Mendelian proportions in a mixed population. *Science*, New Series, v. XXVIII, n. 706, p. 49-50, 1908.

NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva, 2015

PENROSE, R. *A mente nova do rei: computadores, mentes e as leis da física*. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1991.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RUCKER, R. *Infinity and the mind*. Boston: Ed. Birkhauser, 1982.

WEINBERG, W. Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen. *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg*, v. 64, p. 369-82, 1908.

WIGNER, E.P. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 13, p. 1-14, 1960.



Esta obra está licenciada sob a licença [Creative Commons Atribuição – Não Comercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).