



OPERADORES LÓGICOS E CONJUNTOS FUZZY: IMPLICAÇÕES PARA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

LOGICAL OPERATORS AND FUZZY SETS: IMPLICATIONS FOR THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Diogo Sampaio da Silva

Doutorando em Modelagem Matemática pelo PPGMMat-UFPEL.
sampaiodiogo.dasilva@gmail.com

Roberto Antonio Cordeiro Prata

Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pelo PESC-UFRJ. Professor Adjunto do PPGM-UFAM.
praroberto@ufam.edu.br

Este texto é uma introdução aos fundamentos da Matemática Fuzzy, área que surge através da expansão da dicotomia “pertencimento ou não pertencimento” entre conjuntos, o que do ponto de vista da Lógica, sugere uma estrutura lógica não clássica, admitindo múltiplos valores de verdade. Apresentamos os operadores lógicos fuzzy como uma generalização dos operadores lógicos clássicos e estudamos suas relações com os conjuntos fuzzy. Debateremos quais as implicações destes conhecimentos para questões de Filosofia da Matemática.

Palavras-Chave: Lógica Fuzzy, Conjuntos Fuzzy, Matemática Fuzzy, Filosofia da Matemática.

This text is an introduction to the foundations of Fuzzy Mathematics, a field that arose from the expansion of the “belonging or not belonging” dichotomy between sets, which from the point of view of Logic, suggests a non-classical logical structure, accepting a variety of truth values. We present fuzzy logical operators as a generalization of classical logical operators and study their relationship with fuzzy sets. We discuss the implications of this knowledge for questions of Philosophy of Mathematics.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, Fuzzy Mathematics, Philosophy of Mathematics.

1. Introdução

A Matemática Fuzzy é um campo de estudo que reinterpreta a noção de conjunto, que, por ser extremamente basilar na atividade matemática moderna, permite a generalização de conceitos e resultados da Matemática Clássica. Esta teoria foi introduzida na segunda metade do século XX, no trabalho de Zadeh (1965), através da ideia fundamental de conjuntos fuzzy e abrange noções subsequentes, tais como suporte, operações com conjuntos fuzzy e, no centro dos interesses da pesquisa moderna em Matemática Fuzzy: números fuzzy. Dessa forma, o presente texto serve como uma introdução a este campo da Matemática, bem como a debates sobre as implicações das características dele para a Filosofia da Matemática. Mas antes, falaremos sobre a Lógica Fuzzy, que possui ideias semelhantes.

A Matemática Fuzzy surge a partir de uma generalização do conceito de conjunto. Historicamente, a Lógica Fuzzy como objeto de pesquisa foi desenvolvida posteriormente, embora tenha predecessores de até mesmo antes do surgimento da noção de conjunto fuzzy, de acordo com Belohlavek, Dauben, e Klir (2017), e comumente é apresentada na literatura e Matemática após a consolidação dos conjuntos fuzzy. Aproveitando a similaridade entre os conceitos, optamos por introduzir, de forma independente, a Lógica Fuzzy, concentrando-nos em seus conectivos lógicos e motivando suas aplicações a partir de uma perspectiva lógica. Somente após essa apresentação, introduzimos os conjuntos fuzzy, destacando a estreita relação entre os tópicos.

Assim, procuramos, através da Lógica Fuzzy, entender e avaliar argumentos com termos imprecisos formalmente. Isto se aplica em muitas situações do cotidiano, onde não podemos ter certeza de certa afirmação ou do estado de um objeto, inclusive por limitações humanas. Ao tomarmos um remédio, não sabemos o exato segundo em que ele fará efeito, nem há um critério exato separando pessoas altas de pessoas baixas. Muitos termos e informações são conhecidos de modo subjetivo, mas, como veremos, podem assim gerar conclusões que podemos avaliar como corretas ou incorretas. Boa parte de nossa abordagem ao apresentar esta lógica se baseia em Priest (2008).

Como Behounek (2009) aponta, a Lógica Fuzzy não é exatamente “a” teoria que estuda raciocínios vagos, ou aproximados, mas sim uma lógica, ou seja, um estudo de inferências, que trata de um tipo específico de raciocínio inexato: aquele que pode ser graduado. Assim, a Matemática Fuzzy conseqüentemente, se torna o estudo de noções

matemáticas baseadas no abandono da binaridade “pertencer ou não pertencer” por algum modelo que envolva graus de pertencimento a uma classe.

Naturalmente, existem diversas formas de se estender noções matemáticas como a de número e conjunto, ou mesmo as operações e relações entre estes. Isto permite que a literatura apresente uma enormidade de possíveis abordagens da Matemática Fuzzy como generalização da Matemática clássica, gerando não apenas uma teoria matemática, mas várias teorias diferentes entre si.

A ideia de ir além de termos valores verdadeiros e falsos para uma proposição remete à Filosofia Antiga. Isto se traduz na negação do chamado Princípio da Bivalência, sendo um dos primeiros registros de tal negação encontrado já em Aristóteles.

De modo simples, falamos das chamadas lógicas não clássicas, em especial as multivaloradas, pois aquelas que possuem valores de verdade indicando graus de incerteza caracterizam o estudo da chamada lógica fuzzy. No entanto, os primeiros trabalhos que remetem a lógicas com graus de incerteza surgem apenas no final do século XIX e início do século XX. Com base no texto de Belohlavek, Dauben, e Klir (2017), abordamos brevemente como se dá esse surgimento da lógica e matemática fuzzy.

Para matemáticos, um atrativo do presente texto é apresentar esses conceitos, e outros, como o Princípio de Extensão de Zadeh, abrindo caminho para aplicações futuras, pois um dos motivos do grande interesse da comunidade acadêmica sobre a Matemática Fuzzy é a sua aplicabilidade, que adiante comentamos. Focaremos, então, no conceito de número fuzzy como generalização da ideia de número real e investigaremos algumas de suas propriedades. Assim, esperamos apresentar esta área da matemática e uma de suas diversas aplicações em outros campos do conhecimento.

Já para o campo da filosofia, estamos investigando como um campo da Matemática tão rico em diferentes teorias e aplicações pode ajudar a entender o que caracteriza a Matemática como um todo, quais suas relações com o mundo real, já que seus objetos de estudo como números e funções não se localizam em algum momento ou lugar, mas ainda são úteis para descrever os objetos concretos do mundo físico.

Propomos, então, o uso da Matemática Fuzzy, através de sua maior abrangência, como forma de aproximar os conceitos e resultados matemáticos da nossa realidade, permeada de incertezas e aproximações. Esta preocupação com a linguagem e metodologia dos matemáticos, ao sofrer discrepâncias quando transitada da teoria para as aplicações, já era discutida pelo famoso matemático Felix Klein (2016), antes mesmo dos trabalhos de Zadeh.

2. Discussão

Buscamos introduzir de forma simples o estudo da Lógica Clássica, e um objeto de estudo inicial que nos é interessante seriam os conectivos lógicos: modos de, a partir de uma proposição qualquer, gerar outra com valor verdade pré-determinado. Usaremos ainda de tabelas verdade como recurso. Como Fajardo (2017) destaca, apesar de existir axiomatização para a lógica agora introduzida, nomeada lógica proposicional, o uso das tabelas verdade é um critério eficaz, simples e de grande apelo para determinar o valor de verdade de uma proposição na lógica proposicional. Isto é suficiente para nossos propósitos de estudar os conectivos lógicos na lógica fuzzy como generalização dos conectivos da lógica clássica.

A lógica clássica é comumente caracterizada por seguir os chamados princípios lógicos clássicos, conforme Mortari (2001). Enunciamos esses princípios a seguir:

- Princípio da Identidade: Se uma proposição é verdadeira, então ela é verdadeira.
- Princípio da Não Contradição: Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma das duas é falsa.
- Princípio do Terceiro Excluído: Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma das duas é verdadeira.
- Princípio da Bivalência: Toda proposição é verdadeira ou falsa.

O filósofo grego Aristóteles é considerado o fundador da lógica, em razão de seu desenvolvimento da chamada teoria do silogismo como um estudo de inferências. Ao desenvolver tal estudo, ele apresenta e discute o Princípio da Bivalência, sobre o qual reflete a respeito de sua aplicabilidade em sua obra *Organon* (cf. Aristóteles, 2016). Em seu livro *Metafísica*, ele chega até mesmo a expressar a ideia de que algumas afirmações podem ser mais verdadeiras que outras (cf. ARISTÓTELES, 2012).

Apesar de a Lógica Clássica estudada aqui ser diferente daquela originalmente proposta por Aristóteles, os princípios que apresentamos advêm do trabalho deste filósofo grego. Para entendermos o surgimento da discrepância da Lógica Clássica contemporânea com a teoria fundada por Aristóteles, faremos um breve comentário histórico, como o de Linnebo (2017).

As características modernas da lógica proposicional surgem com Gottlob Frege, em um momento da matemática que se caracteriza pela revisitação do chamado método axiomático, que é o método dedutivo empregado na demonstração dos teoremas

matemáticos. Um dos principais motivadores deste movimento consistia na dependência cada vez maior de uma definição rigorosa da noção de número, no estudo de diferentes áreas e conceitos na Matemática. Isto acontecia porque se percebeu que princípios que eram aceitos por serem considerados intuitivamente óbvios, ou seja, poderiam ser de fato deduzidos a partir de outros mais básicos. E ainda, a investigação de novos teoremas na matemática dependia cada vez mais de entender conceitos antes aceitos por intuição.

Por exemplo, Baroni e Otero-Garcia (2014) apontam que, apesar de o cálculo diferencial e integral estabelecido por Newton e Leibniz ter sido rapidamente aceito pela comunidade científica, ao buscar novos resultados, cada vez mais uma formalização dos conceitos anteriores era necessária. Em casos de destaque, o estudo das séries trigonométricas levou: Bernhard Riemann ao estudo das integrais, Georg Cantor ao estudo dos números reais e a criar a Teoria dos Conjuntos, e Karl Weierstrass ao estudo de continuidade e derivabilidade. Observamos que com a exceção da Teoria dos Conjuntos, o que aconteceu foi uma revisitação de conceitos já estabelecidos na comunidade matemática, sob novas concepções de rigor.

Isso permite entender melhor as afirmações de matemáticos renomados, como Poincaré (2011), que defendia que ainda que as verdades matemáticas sigam verdadeiras, a relação entre intuição e rigor se altera conforme a necessidade de cada momento histórico, resultando em diferentes formas de fazer Matemática no decorrer do tempo. A isso se soma a colocação de Russel (2007), que classifica dois tipos principais de estudo na matemática: o construtivo que avança do mais simples para o mais complexo, e o que avança através da análise dos conceitos procurando quais ideias e princípios gerais podem ser obtidos indo no sentido contrário. Em consonância, Klein (2016) comenta o fato de que o desenvolvimento da Matemática é como o de uma árvore: os galhos crescem juntamente com as raízes. Isto é, enquanto novas descobertas são feitas, muitas vezes novos padrões de rigor surgem, e a fundamentação da Matemática é revisitada e reconstruída, de acordo com as necessidades e problemas de cada período.

Voltando ao surgimento da lógica proposicional como conhecemos, Frege, assim como outros de sua época, se preocupava que o uso de linguagens naturais como Francês, Alemão e Inglês, pudesse induzir erros na atividade matemática, introduzindo o primeiro sistema formal, ou seja, uma linguagem artificial munida de axiomas bem formulados, isto é, com regras precisas delimitando o que é um axioma, e regras de inferência. Isto expandiu o que se entendia por lógica, abrindo porta para investigação de uma pluralidade de lógicas

nos dias atuais. Começemos agora a nossa breve introdução aos conceitos lógicos estudados neste texto.

Denotaremos proposições com letras minúsculas, como m , n , p e q . Além disso, seus valores de verdade, isto é, verdadeiro ou falso, são representados respectivamente por 1 e 0. Em um primeiro momento, bem como em texto usuais de introdução à Lógica, como o de Fajardo (2017), estamos apenas utilizando notações sem qualquer atribuição de significado *a priori*, no entanto, o uso dos números 1 e 0 servirá posteriormente para além da mera notação.

Começamos com o conectivo lógico de negação. Dada uma proposição p , sua negação, chamada “não p ” e denotada por $\sim p$, é definida do seguinte modo: $\sim p$ é verdadeira se, e somente se, p é falsa.

Tabela 1 - Conectivo lógico de negação:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico de conjunção, denotado por \wedge e por vezes lido como “e”, precisamos de duas proposições. Sua conjunção é verdadeira se, e somente se, ambas as proposições são verdadeiras.

Tabela 2 - Conectivo lógico de conjunção:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico de disjunção, denotado por \vee e por vezes lido como “ou”, precisamos de duas proposições p e q . Sua disjunção é verdadeira se, e somente se, ao

menos uma das proposições é verdadeira. Assim, o “ou” é inclusivo: não descartamos o caso de ambas as proposições serem verdadeiras.

Tabela 3 - Conectivo lógico de disjunção:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico da implicação, precisamos novamente de duas proposições p e q . Este conectivo é denotado por \rightarrow e por vezes lido como “se p , então q ” ou simplesmente “ p implica q ”. A implicação é falsa se, e somente se, p é verdadeira e q é falsa.

Tabela 4 - Conectivo lógico de implicação:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Dito isso, vamos passar agora ao estudo de uma lógica não clássica, isto é, uma lógica que não pressupõe algum dos princípios lógicos clássicos. Mais precisamente, buscaremos agora tratar proposições com um terceiro valor de verdade além de verdadeiro ou falso: para isso, usaremos o símbolo i , que chamaremos de “incerto” para nossa terceira opção, podendo também ser representado por um número entre 0 e 1.

Houve ainda outros predecessores no estudo da lógica que contemplassem a questão da incerteza como outro possível valor de verdade, mas, em especial, o trabalho do polonês Jan Łukasiewicz se destaca por ser um dos primeiros e mais influentes a desenvolver um sistema formal de lógica multivalorada (com múltiplos valores de verdade). Em Łukasiewicz (1920), o autor apresenta um sistema de três valores de verdade, de modo

que uma proposição pode receber os seguintes valores: verdadeiro, que denotaremos por 1; falso, que denotaremos por 0; e incerto, que denotaremos por i . Note que o Princípio do Terceiro Excluído deixa de valer aqui, pois podemos ter uma proposição que não é nem verdadeira nem falsa, mas incerta.

Agora, buscaremos compreender como podemos generalizar a lógica clássica nesse novo ambiente. Isto é, mostraremos que a lógica multivalorada se comporta exatamente como a lógica clássica quando retiramos o valor i . Neste caso, como nosso foco são os conectivos lógicos, queremos dizer que, ao estudarmos os mesmos conectivos considerando apenas os valores verdadeiro e falso, teremos os mesmos resultados apresentados na lógica clássica, como, por exemplo, a conjunção de duas proposições verdadeiras continuar sendo verdadeira.

Começamos com o conectivo lógico de negação. Dada uma proposição p , sua negação, denotada por $\sim p$, é definida do seguinte modo: $\sim p$ é verdadeira se, e somente se, p é falsa; $\sim p$ é falsa se, e somente se, p é verdadeira; e $\sim p$ é incerta se, e somente se, p é incerta.

Tabela 5 – Conectivo lógico de negação para lógica trivalente de Łukasiewicz

p	$\sim p$
1	0
i	i
0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico de conjunção, denotado por \wedge e por vezes lido como “e”, precisamos de duas proposições p e q . Sua conjunção é verdadeira se, e somente se, ambas as proposições são verdadeiras, falsa se, ao menos uma das proposições é falsa, e incerta nos demais casos.

Tabela 6 – Conectivo lógico de conjunção para lógica trivalente de Łukasiewicz

p	1	1	1	i	i	i	0	0	0
q	1	i	0	1	i	0	1	i	0
$p \wedge q$	1	i	0	i	i	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico de disjunção, denotado por \vee e por vezes lido como “ou”, precisamos de duas proposições p e q . Sua disjunção é verdadeira se, e somente se, ao menos uma das proposições é verdadeira, e falsa se, e somente se, ambas as proposições são falsas. Para os demais casos, isto é, caso tenhamos uma proposição incerta e uma que não seja verdadeira, a sua disjunção é incerta.

Tabela 7 – Conectivo lógico de disjunção para lógica trivalente de Łukasiewicz

p	1	1	1	i	i	i	0	0	0
q	1	i	0	1	i	0	1	i	0
$p \vee q$	1	1	1	1	i	i	1	i	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Para definir o conectivo lógico da implicação, precisamos novamente de duas proposições p e q . Este conectivo é denotado por \rightarrow e por vezes lido como “se p , então q ” ou simplesmente “ p implica q ”. Sua implicação é falsa se, e somente se, p é falsa e q é verdadeira, e incerta se, e somente se, p é verdadeira e q é incerta, ou p é incerta e q é falsa, sendo a implicação verdadeira nos demais casos.

Tabela 8 – Conectivo lógico de implicação para lógica trivalente de Łukasiewicz

p	1	1	1	i	i	i	0	0	0
q	1	i	0	1	i	0	1	i	0
$p \rightarrow q$	1	i	1	1	1	1	0	1	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Vemos aqui como algumas lógicas de 3 ou mais valores verdade podem generalizar a lógica clássica, assim modelando graus de verdade e, em especial, proposições envolvendo incerteza, isto é, apresentamos lógicas com uma quantidade de valores verdade $n \in \mathbb{N}$, ou seja, n é número inteiro não negativo, de modo que $n \geq 2$.

Podemos considerar então o conjunto $K_n = \{j/(n-1) ; j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq n-1\}$ como o nosso conjunto de valores verdade. Assim, por exemplo, ao tomarmos $n = 3$, temos $K_3 = \{0/(n-1), 1/(n-1), 2/(n-1)\} = \{0, 1/2, 1\}$. Neste caso, ao tomarmos $1/2 = i$, temos uma lógica de 3 valores verdade, como a lógica trivalente de Łukasiewicz. Se tomarmos $n = 2$, temos $K_2 = \{0 / (n-1), 1 / (n-1)\} = \{0, 1\}$, teremos uma lógica de dois valores verdade,

como a lógica clássica. Nosso objetivo agora é apresentar conectivos lógicos que abarquem os casos mencionados ao tomarmos $n = 2$ ou $n = 3$, e ainda os generalizem para $n \geq 4$.

No entanto, vale perguntar por que vale a pena buscar valores lógicos “adicionais” na lógica proposicional clássica, ou mesmo na lógica trivalente de Łukasiewicz. Vale observar que a interpretação de um valor de verdade, além de verdadeiro ou falso, denominado *incerteza* já é um fator que torna mais abrangente a lógica proposicional clássica que já é comumente empregada por sua capacidade de analisar argumentos de forma precisa no cotidiano.

Porém, há um ganho para as lógicas que generalizam a lógica trivalente de Łukasiewicz, e conseqüentemente a lógica proposicional clássica, utilizando algum conjunto K_n como conjunto de possíveis valores de verdade. Este ganho se caracteriza por uma interpretação adicional ao número que se utiliza para representar o valor verdade. Assim, $1/2$ é nossa representação para o valor de incerteza i na lógica que emprega o conjunto K_3 , pois representa o número equidistante ao meio dos valores 0 e 1, entre estes valores. Ou seja, o uso do número $1/2$ pode ser entendido como algo entre verdadeiro ou falso, mas com iguais chances de ser qualquer um dos dois. Isto permite que possamos julgar, por exemplo, proposições que envolvam afirmações que não se pode conhecer exatamente, como eventos futuros indeterminados.

Mas e quando podemos classificar as proposições entre mais próximas de verdadeiras ou mais próximas de falsas? É assim que os conjuntos K_n entram em ação, permitindo que, por exemplo, um conjunto $K_4 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ seja empregado para classificar uma proposição p como falsa, mais falsa que verdadeira, mais verdadeira que falsa, e verdadeira, respectivamente.

Assim, este é o momento em que os números 0 e 1 deixam de ser meros símbolos, e passam a representar limites: os casos em que podemos de fato afirmar se uma proposição é verdadeira ou falsa, enquanto os demais valores representam possíveis casos entre verdadeiro e falso, quanto menor o valor, mais próxima de falsa é a proposição, e quanto maior o valor, mais próxima de verdadeira é a proposição. Veremos ainda que podemos aproveitar nossos conhecimentos sobre números ao estudar as lógicas multivaloradas que estamos introduzindo.

Uma das formas de fazer isto, considerada um importante exemplo em Cignoli (1982), é definindo os seguintes conectivos, para proposições p e q com valores de verdade em K_n :

- $\sim p = 1 - p$
- $p \wedge q = \min \{p, q\}$
- $p \vee q = \max \{p, q\}$
- $p \rightarrow q = \min \{1, (1 - p + q)\}$

De fato, cada uma dessas preserva não só o comportamento das tabelas verdade da lógica proposicional clássica, como também as tabelas verdade da lógica trivalente de Łukasiewicz. A representação algébrica dispensa o uso de tabelas verdade, permitindo que através do conhecimento das operações e relações de ordem entre números, possamos deduzir o valor de verdade de uma combinação de proposições relacionadas por meio dos conectivos lógicos, sabendo o valor de verdade das proposições em questão. De forma ainda mais cômoda, estas operações valem para uma infinidade de casos.

A partir de agora, nossa ideia central é generalizar o que vimos anteriormente, apresentando uma lógica cujos valores verdade possam ser qualquer número entre 0 e 1, mantendo a interpretação de 0 indicar falsidade, 1 indicar verdade, e quanto mais próximo de 1, mais “próximo de verdade” é o valor da proposição. Assim, temos uma infinidade (não enumerável) de possíveis valores de verdade.

Basta então tomarmos o intervalo $[0, 1]$ ao invés de K_n e aplicarmos os conectivos lógicos definidos do mesmo modo. Podemos generalizar ainda mais esses conceitos através das definições de t-norma e t-conorma, além das chamadas negação e implicação fuzzy.

Mas por que incluir ainda mais possibilidades de valores de verdade? A motivação é externa, e está intrinsecamente ligada ao surgimento da Matemática Fuzzy. Vale lembrar que Zadeh, além de matemático, era engenheiro, e passou grande parte de sua trajetória acadêmica estudando como formular e empregar na tecnologia o chamado “raciocínio aproximado”, ou seja, o raciocínio que envolve aproximações e intervalos de confiança ao invés de informações determinadas. Isto se dá, por exemplo, quando medimos as dimensões de algum objeto, o que encontramos possui alguma margem de erro, como limitações humanas e do instrumento de medida, que em algum momento possui uma unidade de medida na qual alterações imperceptíveis podem ser realizadas. Régua não discernem nanômetros, por exemplo.

Mais do que isso, a Matemática Fuzzy e a Lógica Fuzzy são ferramentas ideais para lidar com a transição entre estados. Por mais que o número n seja muito grande, existem “saltos” entre os valores de K_n , por exemplo, considere uma proposição como “esta barra de metal está quente”, formalizada na lógica trivalente de Łukasiewicz. Esta proposição

pode ser verdadeira, falsa ou incerta, mas como discernir entre os três? Como só há três opções, em alguma temperatura da barra de metal, a proposição deixa de ser verdadeira para ser incerta, por exemplo. E por mais que se adicionem outros possíveis valores de verdade, não há como definir um bom critério para quando “passar” de um valor para o outro, sem que o critério seja exatamente uma dicotomia como as que pretendemos evitar ao adicionar mais valores de verdade às nossas lógicas estudadas.

Assim, o intervalo $[0,1]$ permite que o resultado dos valores verdade uma proposição possa ser algo contínuo, sem saltos, pois tal é a característica dos intervalos de números reais. Vejamos então como operar com estes valores de forma e generalizar ainda mais o que estudamos até aqui.

As próximas definições e seus respectivos exemplos são encontrados em Barros, Bassanezi e Lodwick (2017).

T-norma: O operador t-norma é uma função $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes condições, para todos $a, b, c, d \in [0, 1]$:

$$T1: T(a, b) = T(b, a) \text{ (comutatividade)}$$

$$T2: T(a, a) = a \text{ (idempotência)}$$

$$T3: T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c) \text{ (associatividade)}$$

$$T4: T(a, 1) = a \text{ (elemento neutro)}$$

$$T5: a \leq c \text{ e } b \leq d \text{ implica } T(a, b) \leq T(c, d) \text{ (monotonicidade)}$$

T-conorma: O operador t-conorma é uma função $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes condições, para todos $a, b, c, d \in [0, 1]$:

$$S1: S(a, b) = S(b, a) \text{ (comutatividade)}$$

$$S2: S(a, a) = a \text{ (idempotência)}$$

$$S3: S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c) \text{ (associatividade)}$$

$$S4: S(a, 0) = a \text{ (elemento neutro)}$$

$$S5: a \leq c \text{ e } b \leq d \text{ implica } S(a, b) \leq S(c, d) \text{ (monotonicidade)}$$

Negação: Uma função $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função que possui as seguintes propriedades:

$$N1: N(0) = 1, N(1) = 0 \text{ (fronteiras)}$$

$$N2: \text{para todo } x \in [0, 1], N(N(x)) = x \text{ (involução)}$$

$$N3: N \text{ é decrescente (monotonicidade)}$$

Implicação fuzzy: Um operador $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma implicação fuzzy se satisfizer as seguintes condições:

1. Reproduzir a tabela de implicação clássica.
2. Ser decrescente na primeira variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$, se $a \geq b$, tem-se $(a \Rightarrow x) \leq (b \Rightarrow x)$.
3. Ser crescente na segunda variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$, para $a \geq b$, segue-se $(x \Rightarrow a) \geq (x \Rightarrow b)$.

Finalizamos com alguns exemplos dos operadores definidos:

Exemplos de t-normas:

1. **T-norma mínimo**: (t-norma de Łukasiewicz): $T_{\min}(a, b) = \min(a, b)$. Retorna o valor mínimo entre os graus de pertinência de a e b .
2. **T-norma produto** (produto algébrico): $T_{\text{prod}}(a, b) = a \cdot b$. Corresponde ao produto dos graus de pertinência de a e b .
3. **T-norma Łukasiewicz**: $T_L(a, b) = \max(0, a + b - 1)$. Combina os graus de pertinência de a e b somando-os, subtraindo 1 e, em seguida, tomando o máximo entre o resultado e 0.

Exemplos de t-conormas:

1. **T-conorma máximo**: $S_{\max}(a, b) = \max(a, b)$. Retorna o valor máximo entre os graus de pertinência de a e b .
2. **T-conorma soma** (soma algébrica): $S_{\text{soma}}(a, b) = a + b - a \cdot b$. Corresponde à soma dos graus de pertinência de a e b , subtraindo o produto de a e b para evitar contagem dupla da interseção.
3. **T-conorma Łukasiewicz**: $S_L(a, b) = \min(1, a + b)$. Combina os graus de pertinência de a e b somando-os e, em seguida, tomando o mínimo entre o resultado e 1.

Exemplos de negações:

1. A função $N(x) = 1 - x$ é um exemplo de negação.
2. A função $N(x) = (1 - x) / (1 + x)$ também é um exemplo de negação.

Exemplos de implicações fuzzy:

1. **Implicação de Gödel**: $(x \Rightarrow y) =$
 - 1, se $x \leq y$
 - y , se $x > y$
2. **Implicação de Łukasiewicz**: $(x \Rightarrow y) = \min\{1 - x + y, 1\}$
3. **Implicação de Kleene-Dienes**: $(x \Rightarrow y) = \max\{1 - x, y\}$
4. **Implicação de Reichenbach**: $(x \Rightarrow y) = (1 - x) + xy$
5. **Implicação de Zadeh**: $(x \Rightarrow y) = \max\{1 - x, \min(x, y)\}$

Apresentados os conectivos da Lógica Fuzzy, vejamos como estes se relacionam com as operações entre conjuntos fuzzy. Nossa ideia agora é representar sob nova ótica os conjuntos já conhecidos, que chamaremos de conjuntos clássicos, apesar de, dentro do contexto da Matemática Fuzzy, também serem conhecidos como conjuntos *crisp*. De forma resumida, os conjuntos clássicos são total e unicamente definidos por seus elementos. Geralmente, representamos isso por uma lei de formação, indicando que o conjunto é tal que seus elementos são os que possuem certa propriedade e apenas estes.

Podemos, no entanto, através da noção de função característica, apresentar esta ideia como um crivo: selecionamos certos entes, os elementos do conjunto em questão, e os indexamos com um símbolo, neste caso o número 1, descartando os demais e indexando-os com outro símbolo, neste caso o número 0.

Definição de função característica: Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A , denotada por $\chi_A(x)$, é dada por:

$$\chi_A(x): U \rightarrow \{0, 1\}; \chi_A(x) =$$

- 1, se $x \in A$;
- 0, se $x \notin A$.

Ou seja, $\chi_A(x)$ associa a cada elemento x do conjunto U o valor 1 se x pertence a A , e o valor 0 caso contrário.

Vejamos agora como podemos tomar conjuntos já familiares e tratá-los através da ótica de funções características.

Exemplo 1: O intervalo real $A = [2, 3]$ tem como função característica a função $\chi_{[2,3]}(x)$, dada por:

$$\chi_{[2,3]}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}; \chi_{[2,3]}(x) =$$

- 1, se $2 \leq x \leq 3$;
- 0, caso contrário.

Ou seja, $\chi_{[2,3]}(x)$ associa o valor 1 a qualquer número real x tal que $2 \leq x \leq 3$ e o valor 0 a todos os outros valores reais.

Naturalmente, o exemplo acima pode ser generalizado para quaisquer números reais e qualquer tipo de intervalo. Melhor ainda, para qualquer tipo de conjunto

Exemplo 2: Seja o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}; 1/x < \pi\}$, podemos representá-lo através da função característica $\chi_B(x)$, dada por:

$$\chi_B(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}; \chi_{[2,3]}(x) =$$

- 1, se $1/x < \pi$;
- 0, caso contrário.

A função $\chi_B(x)$ associa o valor 1 a qualquer número real x tal que $1/x < \pi$, e o valor 0 caso contrário.

Assim, enquanto nos conjuntos clássicos podemos dizer que um conjunto é equivalente à sua função característica, ou mais especificamente ao seu gráfico, traremos uma ideia semelhante para introduzir os conjuntos fuzzy, flexibilizando nossa noção de pertencimento a um dado conjunto.

A ideia é modelar matematicamente certos conceitos usados na linguagem cotidiana, como “em torno de”, para tratar conjuntos cuja formação não é clara, e, no entanto, operar matematicamente com tais conjuntos, que geralmente não são contemplados na Matemática padrão.

Veremos isso em mais detalhes e com mais clareza adiante, através de exemplos.

Definição de conjunto fuzzy: Seja U um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função $\varphi_A(x)$, que associa a cada elemento x do conjunto U um valor no intervalo $[0,1]$, indicando o grau de pertinência de x ao conjunto fuzzy A .

Vale lembrar que podemos chamar um subconjunto fuzzy A de U simplesmente de conjunto fuzzy A quando U é subentendido ou fixado anteriormente.

Também vale lembrar que todo conjunto clássico é um conjunto fuzzy, basta notar que $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$. Deste modo, os exemplos de conjuntos clássicos são também exemplos de conjuntos fuzzy, mas agora apresentamos exemplos de conjuntos fuzzy propriamente ditos, isto é, não clássicos.

Exemplo 3: Seja o conjunto C dos números inteiros pequenos. Podemos representá-lo com a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_C : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]; \quad \varphi_C(x) = 1 / |x + 1|$$

Esta função associa ao número 0 o resultado 1, e cada número se distanciando de 0, um resultado cada vez menor, assim, ao invés de termos um critério para dizer se um número como 100 é pequeno ou não, podemos comparar e dizer que certamente o número 0 é pequeno e números próximos de 0 também são mais próximos de serem considerados pequenos.

A ideia de tal conjunto com lei de associação incerta como “números inteiros pequenos” não poderia ser bem modelada pela abordagem padrão, pois teríamos que

separar os inteiros em dois conjuntos: o conjunto dos inteiros pequenos em questão, e seu complementar, formado pelos elementos que não estão no primeiro.

Mas como separar os inteiros de forma precisa nestas duas classes? Podemos dizer objetivamente se um número como 4 é pequeno ou não?

Assim, a abordagem dos conjuntos fuzzy, e conseqüentemente de funções de pertinência, mostra sua vantagem: é mais natural comparar os inteiros e dizer que, por exemplo, 4 com toda certeza é mais próximo de ser um número pequeno que 20.

Exemplo 4: Seja D o conjunto das pessoas altas. Podemos representar este conjunto através da seguinte função de pertinência, sendo x a altura de uma pessoa, em centímetros:

$$\varphi_D(x): \mathbb{Q}^+ \rightarrow [0, 1]; \varphi_D(x) =$$

- 0, se $x < 180$
- $(x - 180) / (x - 80)$, se $x \geq 180$

Com algum conhecimento de cálculo, mostra-se que a função $\varphi_D(x)$ é uma função estritamente crescente, isto é, $\varphi_D(180) = 0$, e para todo número $x > 180$, o resultado de $\varphi_D(x)$ cresce juntamente com o número, isto é, para valores cada vez maiores de x , os resultados de $\varphi_D(x)$ são cada vez maiores, sem nunca exceder o número 1.

Optamos \mathbb{Q}^+ como domínio, pois geralmente as medidas são aproximações de até duas casas decimais e sempre positivas, mas poderíamos ter outro conjunto, como \mathbb{Q} ou \mathbb{R}^+ .

Desta maneira, identificamos um conjunto fuzzy através de sua função de pertinência, que seleciona com qual grau um dado elemento pertence ao conjunto, onde podemos dizer que, conforme a imagem de um elemento $x \in U$ por φ_A “se aproxima” de 1, o elemento pertence com “maior grau” ao conjunto. Por isso, podemos identificar o conjunto fuzzy com sua função de pertinência, ou mais especificamente, seu gráfico.

Definição de igualdade entre conjuntos fuzzy: Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.

Novamente, isso deixa claro que, enquanto para os conjuntos clássicos, o que define um conjunto são os elementos que pertencem a tal conjunto, para os conjuntos fuzzy precisamos entender uma hierarquia entre os elementos, para saber quais “pertencem mais” ao conjunto, e isso é representado pela função de pertinência. Assim, esta pode ser

considerada o próprio conjunto fuzzy em questão. Tal definição acima é propositalmente semelhante à famosa “dois conjuntos são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos”.

Agora introduzimos as operações com conjuntos fuzzy, naturalmente formas de relacionar dois conjuntos fuzzy tomando suas funções de pertinência e trazendo uma terceira, representando o conjunto resultante da operação. Como veremos, tais operações generalizam as já estabelecidas com conjuntos clássicos, pois, quando restritas a estes, coincidem com as operações de conjuntos clássicos, apenas apresentadas através de suas funções características.

Definição de união de conjuntos fuzzy: Dados dois conjuntos fuzzy A e B , definimos sua união $A \cup B$ como o conjunto fuzzy tendo a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_{A \cup B} : U \rightarrow [0, 1]; \varphi_{A \cup B}(x) = \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}$$

Quando restringimos o contradomínio ao conjunto $\{0, 1\}$, obtemos o caso dos conjuntos clássicos, e podemos ver como esta definição ainda funciona como esperado.

Exemplo 5. Dados dois conjuntos clássicos A e B , contidos em U , sua união $A \cup B$ tem a seguinte função de pertinência: $\chi_{A \cup B} : U \rightarrow \{0, 1\}; \chi_{A \cup B}(x) = \max \{ \chi_A(x), \chi_B(x) \}$.

Caso $\chi_{A \cup B}(x) = 1$, então $\max \{ \chi_A(x), \chi_B(x) \} = 1$ e assim, $\chi_A(x) = 1$ ou $\chi_B(x) = 1$. E cada uma das implicações anteriores admite recíproca, sendo assim, temos uma cadeia de equivalências. Portanto, $\chi_{A \cup B}(x) = 1$ se e somente se $\chi_A(x) = 1$ ou $\chi_B(x) = 1$, isto é, se $x \in A$ ou $x \in B$.

Analogamente, se $\chi_{A \cup B}(x) = 0$, então $\max \{ \chi_A(x), \chi_B(x) \} = 0$ e assim, $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$. E novamente, cada implicação anterior admite recíproca, deste modo, obtemos uma cadeia de equivalências. Desta forma, $\chi_{A \cup B}(x) = 0$ se e somente se $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$, ou seja, se $x \notin A$ e $x \notin B$.

Assim, nossa definição de fato generaliza o caso dos conjuntos clássicos, pois $\chi_{A \cup B}(x) = 0$ se e somente se $x \notin A \cup B$ e $\chi_{A \cup B}(x) = 1$ se e somente se $x \in A \cup B$.

Vejamos agora a definição de interseção de conjuntos fuzzy, e novamente veremos como esta generaliza a interseção de conjuntos clássicos.

Definição de interseção de conjuntos fuzzy: Dados dois conjuntos fuzzy A e B , definimos sua interseção $A \cap B$ como o conjunto fuzzy tendo a seguinte função de pertinência: $\varphi_{A \cap B} : U \rightarrow [0, 1]$; $\varphi_{A \cap B}(x) = \min \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$.

Agora, como no caso da união, veremos como encaramos a interseção de conjuntos clássicos através dessa nova ótica.

Exemplo 6. Dados dois conjuntos clássicos A e B , contidos em U , sua interseção $A \cap B$ tem a seguinte função de pertinência: $\chi_{A \cap B} : U \rightarrow \{0, 1\}$; $\chi_{A \cap B}(x) = \min \{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.

Se $\chi_{A \cap B} = 1$, então $\min \{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$ e, assim, $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$. E como anteriormente, cada uma das implicações anteriores admite recíproca. Sendo assim, temos uma cadeia de equivalências, logo $\chi_{A \cap B} = 1$ se e somente se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$, ou ainda, se $x \in A$ e $x \in B$.

Analogamente, se $\chi_{A \cap B}(x) = 0$, então $\min \{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$ e, assim, $\chi_A(x) = 0$ ou $\chi_B(x) = 0$. E novamente, temos uma cadeia de equivalências, portanto $\chi_{A \cap B}(x) = 0$ se e somente se $\chi_A(x) = 0$ ou $\chi_B(x) = 0$, ou seja, se $x \notin A$ ou $x \notin B$.

Assim, nossa definição de fato generaliza o caso dos conjuntos clássicos, pois $\chi_{A \cap B}(x) = 0$ se e somente se $x \notin A \cap B$ e $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ se e somente se $x \in A \cap B$.

Agora, definimos o complementar de um conjunto fuzzy e verificamos como esta noção funciona para conjuntos clássicos.

Definição de complementar de conjunto fuzzy: Dado um conjunto fuzzy A , definimos seu complementar A' como o conjunto fuzzy tendo a seguinte função de pertinência: $\varphi_{A'} : U \rightarrow [0, 1]$; $\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

Exemplo 7. Dado um conjunto $A \subset U$, seu complementar tem como função característica: $\chi_{A'} : U \rightarrow \{0, 1\}$; $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Assim, $\chi_{A'}(x) = 1$ equivale a $1 - \chi_A(x) = 1$, o que equivale a $\chi_A(x) = 0$, ou seja, $x \notin A$. Da mesma forma, $\chi_{A'}(x) = 0$ equivale a $1 - \chi_A(x) = 0$, o que por sua vez equivale a $\chi_A(x) = 1$, ou seja, $x \in A$.

Mais uma vez, ilustramos isso com outro exemplo no caso dos conjuntos clássicos.

Exemplo 8. Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\}$. Sua função característica é:

$$\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}; \chi_A(x) =$$

- 1, se $x^2 < 2$
- 0, se $x^2 \geq 2$.

Assim, a função característica do complementar de A é: $\chi_{A^c} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}; \chi_{A^c}(x) =$

- 0, se $x^2 < 2$
- 1, se $x^2 \geq 2$.

É simples ver que $\chi_{A^c}(x) = 1$ equivale a $x \notin A$ e $\chi_{A^c}(x) = 0$ equivale a $x \in A$.

Da mesma forma que é interessante verificar que as operações entre os conjuntos fuzzy são generalizações das operações conhecidas entre conjuntos clássicos, também interessa verificar se as propriedades de tais operações são mantidas, como veremos no teorema a seguir.

No entanto, antes do teorema em si, dois casos importantes de conjuntos fuzzy, ou melhor, suas funções características, devem ser mencionados: o conjunto universo e o conjunto vazio.

Exemplo 9. O conjunto universo U tem como função característica, para todo $x \in$

$$U: \varphi_U : U \rightarrow \{0, 1\}; \varphi_U(x) = 1.$$

Analogamente, o conjunto vazio \emptyset tem como função característica, para todo $x \in$

$$U: \varphi_{\emptyset} : U \rightarrow \{0, 1\}; \varphi_{\emptyset}(x) = 0.$$

Assim, naturalmente, estes são exemplos de conjuntos complementares, interessantemente presentes em qualquer subconjunto fuzzy, ainda que naturalmente o conjunto universo varia de acordo com o estudo proposto.

Teorema: As operações entre subconjuntos fuzzy possuem as seguintes propriedades, para A, B e C subconjuntos fuzzy de U:

- a. $A \cup B = B \cup A$;
- b. $A \cap B = B \cap A$;
- c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
- d. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- e. $A \cup A = A$;

f. $A \cap A = A$;

g. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

h. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

i. $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$;

j. $A \cap U = A$ e $A \cup U = U$;

k. $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

l. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

A demonstração do teorema se resume em manipular as propriedades das funções que definem as operações entre conjuntos fuzzy, nomeadamente, as funções máximo, mínimo e $1-x$. De forma ainda mais conveniente, as funções máximo e mínimo podem ser apresentadas por meio de relações aritméticas básicas, a saber, pelas igualdades $\min\{x, y\} = (x + y - |x - y|)/2$ e $\max\{x, y\} = (x + y + |x - y|)/2$.

Este teorema e as definições sobre lógica fuzzy e conjuntos fuzzy são encontrados no texto de Barros, Bassanezi e Lodwick (2017). Vale destacar que as definições relativas aos conjuntos fuzzy e suas operações já estavam presentes no texto de Zadeh (1965) que introduziu a Matemática Fuzzy.

Como Behounek (2009) destaca, a Matemática fuzzy pode ser abordada como a teoria matemática resultante de um sistema lógico fuzzy, isto é, com uma infinidade de valores verdade, e conectivos lógicos como os apresentados até aqui, permitindo que as fórmulas produzidas na lógica fuzzy sejam análogas, por vezes quase idênticas a suas contrapartes na lógica proposicional clássica.

Por exemplo, munindo uma lógica fuzzy com os conectivos de conjunção, disjunção e negação sendo a t-norma do máximo, a t-conorma do mínimo e a negação $N(x) = 1 - x$, podemos definir as operações entre conjuntos fuzzy como:

$$A \cap B = \{x; Ax \wedge Bx\}$$

$$A \cup B = \{x; Ax \vee Bx\}$$

$$A' = \{x; \sim Ax\}$$

Sendo Ax e Bx abreviações para $x \in A$ e $x \in B$, respectivamente. As mesmas definições podem ser feitas em geral para qualquer trio constituído por t-norma, t-conorma

e negação fuzzy. Isto ilustra as vantagens de empregar conhecimentos tanto de Lógica quanto de Matemática ao estudar os fundamentos de uma nova teoria matemática.

Mas o que estas generalizações dos conectivos lógicos e das operações entre conjuntos significam para a Filosofia da Matemática? Vejamos primeiro algumas das questões que podem ser levantadas com base no visto até aqui.

Como Newton da Costa (1992) pontua, o desenvolvimento das teorias de fundamentos da Matemática ocorre juntamente do desenvolvimento da própria Matemática, não apenas no sentido cronológico. De fato, é difícil dissociar Lógica da Teoria dos Conjuntos, e ideias que surgem naturalmente em um campo acabam se refletindo em outro.

Naturalmente, os fundamentos da Matemática fazem com que esta área avance, pois firmam bases e explicam relações que sustentam novos resultados. Mais surpreendente, no entanto, é a relação contrária, e a Matemática Fuzzy possui vários exemplos de como o desenvolvimento da Matemática impulsiona ainda as pesquisas nos fundamentos da Matemática.

De fato, temos os conceitos de t-norma e t-conorma, bem como função característica, que não são próprios da Matemática Fuzzy, sendo na verdade emprestados de teorias da Matemática Clássica. Mais interessante ainda é o surgimento dos conceitos de funções e outros relacionados a Teoria dos Conjuntos, que atualmente formam a linguagem que unifica a Matemática contemporânea, tanto no caso clássico quanto no caso fuzzy.

De acordo com Baroni e Otero-Garcia (2014), a Teoria dos Conjuntos nasceu das pesquisas de Georg Cantor ao tentar provar novos resultados sobre séries trigonométricas, que levaram o matemático a revisar o que é um número real.

Klein (2009) compara o desenvolvimento da Matemática ao crescimento de uma árvore, que aprofunda suas raízes ao mesmo tempo que alcança novas alturas com seus galhos. Isso simboliza que, ao mesmo tempo que novos resultados surgem, também surgem novo entendimento sobre o que os fundamenta.

Poincaré (2011) defende que a Matemática se desenvolve a partir da relação entre a intuição e o rigor, que não apenas se expandem, mas mudam de característica conforme o tempo. Assim, a Matemática de hoje não é necessariamente um resultado de crescimento no rigor, mas sim de como o rigor matemático foi alterado pelas suas descobertas.

Isso também pode ser exemplificado com o caso da Matemática Fuzzy, que surge como uma teoria voltada para aplicações, já planejada propositalmente como uma

ferramenta para explicar fenômenos do mundo real. A alta aplicabilidade da Matemática Fuzzy é a razão de ser um tópico de pesquisa que se desenvolveu grandemente desde seu surgimento.

O fato de uma área da Matemática ser concebida propositalmente para modelar eventos reais ajuda a enfrentar o que Linnebo (2017) destaca como um dos maiores desafios na Filosofia da Matemática: explicar como uma ciência que lida com objetos sem localização no espaço e no tempo consegue explicar relações entre objetos que possuem tal localização?

Naturalmente, não chegamos a uma resposta definitiva, mas dizer que a Matemática Fuzzy consegue descrever fenômenos reais, pois foi concebida justamente com esse propósito é uma explicação razoável.

Conclusão

Apresentamos uma breve introdução ao que caracteriza uma lógica clássica, e o que caracteriza a lógica fuzzy, além de através das tabelas verdade, analisar os conectivos lógicos da lógica proposicional clássica e da lógica trivalente de Łukasiewicz como casos a serem generalizados pelos operadores lógicos definidos para lógica fuzzy. Introduzimos ainda as operações entre conjuntos fuzzy, e mostramos que são relacionadas aos operadores lógicos de forma muito semelhante à relação entre suas contrapartes nas teorias clássicas.

Esperamos que os breves comentários antes, durante e após essa exposição teórica ajudem a mostrar que os fundamentos da matemática são um campo interdisciplinar, que necessita de conhecimentos de Matemática, Lógica, Filosofia e até mesmo História dessas disciplinas.

Referências Bibliográficas

ARISTÓTELES. **Organon**. Tradução de Edson Bini. São Paulo: Edipro, 2016.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução de Edson Bini. São Paulo: Edipro, 2012.

BARONI, R. L., OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Coleção PROPG Digital (UNESP), 2014.

BARROS, L. C. de; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, W. A. **A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications**. Cham: Springer, 2017.

BĚLOHLÁVEK, R.; DAUBEN, J. W., KLIR, G. J. **Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective**. Oxford: Oxford University Press, 2017.

CIGNOLI, R. *Proper n -valued Łukasiewicz algebras as s -algebras of Łukasiewicz n -valued propositional calculi*. In: **Studia Logica**, v. 41, p. 3–16, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00373490>. Acesso em 30 de março de 2026.

DA COSTA, N. C. A. **Introdução aos fundamentos da matemática**. Rio de Janeiro: Globo, 1962.

FAJARDO, R. A. S. **Lógica Matemática**. São Paulo: Edusp, 2023.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LINNEBO, Ø. **Philosophy of mathematics**. Princeton: Princeton University Press, 2017.

ŁUKASIEWICZ, J. *On three-valued logic*. In: **Ruch Filozoficzny**, v. 5, n. 170–171, 1920.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Unesp, 2001.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.

PRIEST, G. **An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

ZADEH, L. *Fuzzy Sets*. In: **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S00199586590241X>. Acesso em 30 de março 2026.

Data da submissão: 16 jul. 2025.

Data do aceite: 15 dez. 2025.



Esta obra está licenciada sob licença Creative Commons Atribuição Não Comercial 4.0 Internacional (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.pt>).