O DILEMA DE BENACERRAF E SEU LUGAR NA FILOSOFIA: UMA BREVE INTRODUÇÃO

Sérgio Ricardo Schultz

Doutor em Filosofia pela PUCRJ
Professor Adjunto do Curso de Filosofia da UVA
sergiorschultz@gmail.com

Resumo
O objetivo deste artigo é fornecer uma introdução ao dilema de Benacerraf, um dos argumentos centrais em filosofia matemática na segunda metade do século XX, salientando suas conexões com áreas mais amplas da filosofia, como epistemologia, semântica e ontologia. Apresentado originalmente no artigo "Mathematical Truth" (1973), o argumento formula dois requerimentos a serem cumpridos por qualquer concepção de verdade matemática, um semântico e outro epistemológico, e conclui que se uma teoria de verdade matemática satisfaz um dos requerimentos, justamente por isto ela falha em satisfazer o outro. O foco não será o de explicar as diferentes tentativas de respostas e reformulações do dilema, como usualmente ocorre nos livros de introdução à filosofia da matemática, nem de fazer uma exposição crítica da formulação do dilema. Antes, introduzo o argumento salientando como ele articula problemas filosóficos acerca da matemática com problemas mais amplos sobre que tipos de coisas existem na realidade, qual a natureza do conceito de verdade e quais são nossos meios de conhecimento. Na primeira seção, exponho o que se pode chamar de concepção padrão de matemática, que supõe que esta é uma área de conhecimento puramente racional acerca de entes abstratos, e abordo alguns dos problemas filosóficos trazidos por ela, especialmente no que diz respeito a teses metafísicas e epistemológicas abrangentes. Na segunda seção do artigo, descrevo o dilema de Benacerraf, distinguindo as duas abordagens ao conceito de verdade matemática consideradas pelo autor, os requerimentos sobre uma explicação adequada para aquele conceito e como que estas abordagens se saem diante dos requerimentos. Por fim, argumento que o dilema de Benacerraf traz a matemática como um problema filosófico, com o conceito de verdade matemática servindo como um ponto ao redor do qual se formulam problemas para teorias ontológicas, epistemológicas e semânticas.
Palavras-chave: Dilema de Benacerraf. Verdade matemática. Matemática. Platonismo. Empirismo.

Abstract
The aim of this article is to introduce the Benacerraf's dilemma, one of the main arguments in philosophy of mathematics in the second half of the twentieth century, emphasizing its connections with broader areas of philosophy such as epistemology, semantics and ontology. Originally presented in the article "Mathematical Truth" (1973), the argument formulates two requirements to be fulfilled by any conception of mathematical truth, a semantic and an epistemological one, and concludes that if a theory of mathematical truth satisfies one of the requirements, precisely because of this it fails to satisfy the other. The focus will not be on explaining the different answers and re-formulations that the dilemma received after being originally presented in "Mathematical Truth", as usually occurs in introductory books on the philosophy of mathematics, nor on giving a critical exposition of the original formulation of the dilemma. Rather, I introduce the argument by pointing out how it articulates philosophical problems about mathematics with wider problems about what kinds of things exist in reality, what is the nature of truth, and what are our means of knowledge. In the first section, I outline what may be called the standard conception of mathematics, which assumes that this is a purely rational area of knowledge about abstract entities, and address some of the philosophical problems brought about by it, especially with regard to broader metaphysical and epistemological thesis. In the second section, I describe Benacerraf's dilemma, distinguishing the two approaches to the concept of mathematical truth considered by the author, the requirements for an adequate explanation for that concept, and how these approaches meet the requirements. Finally, I argue that Benacerraf's dilemma brings mathematics as a philosophical problem, with the concept of mathematical truth serving as a point around which are formulated problems for ontological, epistemological, and semantic theories.
Keywords: Benacerraf's dilemma. Mathematical truth. Mathematics. Platonism. Empirism.

Em um artigo de 1973, "Mathematical Truth", Paul Benacerraf formulou um dos mais influentes problemas da filosofia da matemática da segunda metade do século XX. Trata-se de um dilema que desafia qualquer teoria da verdade matemática a conciliar uma explicação das condições de verdade dos enunciados matemáticos de modo condizente com a explicação fornecida para os enunciados empíricos e uma epistemologia que explique como é possível alcançar o conhecimento matemático que possuímos. Meu objetivo é explicar o dilema de Benacerraf de forma introdutória, relacionando-o com temas filosóficos mais amplos. Em particular, pretendo tornar clara a importância do argumento no contexto de debates em epistemologia, ontologia e filosofia da linguagem. Desta forma, apresento uma breve introdução a um problema em filosofia da matemática explicando também por que esta disciplina importa no contexto filosófico abrangente.

Primeiro, descrevo aquilo que pode ser chamado de "concepção padrão de matemática", a saber, a concepção platonista e apriorista desta disciplina, salientando debates filosóficos relacionados a ela que vão além dos confins da filosofia da matemática. Em especial, saliento problemas referentes ao caráter *a priori* do conhecimento matemático e a questões de ontologia e empirismo. Na segunda seção do artigo, descrevo o dilema de Benacerraf, distinguindo as duas abordagens ao conceito de verdade matemática consideradas pelo autor, os requerimentos sobre uma explicação adequada para aquele conceito, o semântico e o epistemológico, e como que estas abordagens se saem diante dos requerimentos. Por fim, argumento que o dilema de Benacerraf traz a matemática como um problema filosófico, com o conceito de verdade matemática servindo como um ponto ao redor do qual se formulam problemas para teorias ontológicas, epistemológicas e semânticas. Minha conclusão é que o argumento não apenas traz um problema em filosofia da matemática, mas também recupera questões desta área articulando-as com debates filosóficos centrais e tradicionais.

1 A matemática como problema filosófico

De acordo com uma concepção comum, padrão, de matemática, há uma distinção radical entre ela e as demais disciplinas científicas. Enquanto estas últimas procedem por meios *a posteriori* – observação e experimentação – e utilizam extensivamente formas de raciocínio não dedutivo, a matemática seria, por excelência, uma disciplina *a priori* dedutiva. Na matemática, nós não observamos nem experimentamos, mas sim demonstramos, deduzindo os teoremas a partir dos princípios básicos da teoria. Quanto ao tema, ela também se destacaria frente a outras áreas de conhecimento na medida em que estuda um domínio de objetos radicalmente distintos daqueles estudados pelas demais ciências. Os entes matemáticos – números, conjuntos, funções, etc. – são entes abstratos que, como tais, não possuem localização espaciotemporal e não participam em relações causais: não existem causas e efeitos em matemática.[1] Desta forma, a matemática se caracterizaria por ser uma investigação puramente *a priori* e dedutiva, isto é, puramente racional, acerca de entes abstratos e, dado sua longa história e seu sucesso, forneceria um exemplo perfeito e bem sucedido de conhecimento puramente racional.

A concepção de matemática exposta acima também pode ser explicada lembrando as características que, intuitivamente, atribuímos a seus enunciados. Em primeiro lugar, falariam e seriam verdadeiros acerca de algo. Da mesma forma que

1 Estas características são salientadas também por Linnebo (2017, p. 4). O objetivo do autor é similar ao meu: situar a matemática como uma fonte de problemas filosóficos, e minha argumentação nesta seção se aproxima da sua em alguns aspectos.

"Fortaleza é maior do que Sobral" fala sobre duas coisas, as cidades de Fortaleza e de Sobral, também "7 > 5" falaria sobre duas coisas, os números 7 e 5, e seria verdadeiro porque aqueles números existem e são realmente como o enunciado diz que são. Além disto, as verdades matemáticas seriam atemporais e necessárias. Não tem sentido dizer que "7 > 5" *era* verdadeiro ou "7 *era* maior do que 5", como se ele fosse verdadeiro no passado, mas poderia não ser no futuro. Não seria correto dizer também que esta sentença poderia não ser verdadeira: se um enunciado matemático é verdadeiro, então é impossível que ele não fosse verdadeiro. Além disto, nenhuma experiência poderia contradizer (ou confirmar) uma verdade matemática. Para dar um exemplo banal, se tenho sete moedas em meu bolso, adiciono cinco e, ao contá-las, vejo que tenho onze, a conclusão não é que 7 + 5 = 11, mas sim que perdi uma moeda ou contei errado.

Desde um ponto de vista intuitivo, enunciados matemáticos não parecem falar de uma realidade mutável e contingente, mas sim de aspectos atemporais e necessários da realidade. Aqui vem à tona um aspecto filosoficamente relevante desta disciplina: como mencionamos acima, ela representa um exemplo perfeito e bem sucedido de conhecimento puramente racional. Mas isto significa dizer que a matemática se constitui no exemplo perfeito do tipo de conhecimento almejado pela metafísica, como esta área da filosofia é tradicionalmente entendida. A proximidade entre conhecimento matemático, quando concebido do modo descrito acima, e conhecimento metafísico traz à tona alguns questionamentos filosóficos fundamentais que ultrapassam os confins da filosofia da matemática.

Uma forma extremamente influente e rica de formular o problema da matemática em um contexto filosófico amplo deve-se a Kant. Na *Crítica da razão pura,* ele distingue entre dois tipos de juízos *a priori*. De um lado teríamos os analíticos, que são aqueles nos quais o conceito do predicado está contido no conceito do sujeito ou, em uma definição alternativa, aqueles redutíveis aos princípios de não-contradição. Estes juízos verdadeiros em virtude apenas dos conceitos que neles ocorrem e seriam típicos da lógica, onde "[…] a razão apenas se ocupa de si própria." (KANT, 2008, p. 17 [*Kritik der reinen Vernunft*, BX]). Por outro lado, teríamos juízos sintéticos *a priori*, onde o predicado não está contido no sujeito e que, por isso, acrescenta algo ao sujeito. Estes seriam juízos *a priori* que estendem ou ampliam nosso conhecimento e seriam exemplificados pela matemática, de onde se poderia ter certeza de que eles são possíveis. São deste tipo também os enunciados que constituiriam o conhecimento almejado pela metafísica. Assim, uma explicação sobre a natureza e possibilidade do conhecimento matemático se mostrava central para compreender o *a priori* de modo geral e, em especial, o *a priori* metafísico e filosófico (cf. *KrV*, A713/B741). No caminho para a explicação da possibilidade da metafísica, havia uma explicação da possibilidade dos juízos matemáticos.[2]

De um modo mais geral, o problema da matemática na filosofia crítica kantiana se coloca no contexto do problema geral da razão pura, que pode ser formulado através da pergunta: "como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*?" Esta é a formulação kantiana da pergunta central acerca do conhecimento *a priori*. Segundo ele, uma resposta negativa, como aquela que pode ser extraída de Hume, significaria também negar a possibilidade da matemática pura. Por outro lado, salienta Kant, uma resposta positiva para o problema também teria que explicar como é possível a matemática pura (cf. *KrV*, B19-20). Portanto, o problema acerca da possibilidade do conhecimento em geral, e do conhecimento *a priori*, em particular, passaria necessari-

2 Uma explicação acessível e abrangente da filosofia da matemática kantiana, incluindo sua conexão com a questão sobre a possibilidade da metafísica, em particular, e dos juízos sintéticos *a priori* de modo geral, encontra-se em: SHABEL, 2016, especialmente seção 2.

amente por uma filosofia da matemática, por uma explicação do conhecimento matemático, independentemente de nossa posição epistemológica.

Dentro da filosofia contemporânea, uma maneira introdutória de articular o problema filosófico trazido pela matemática se encontra em Linnebo (2017). Ali, o autor formula a questão como sendo aquela sobre "como podemos encontrar lugar, em uma visão de mundo amplamente científica, para uma ciência com as características tão desafiadoras quanto aquelas da matemática" (*Ibidem*, p. 5). Neste contexto, por visão de mundo científica se entende uma na qual não haveria mais lugar para um tipo de conhecimento como aquele da antiga metafísica racional, um conhecimento sobre realidade baseado puramente na razão, como o da concepção padrão de matemática descrita acima. O problema da matemática se coloca, de modo similar ao caso kantiano, em um contexto muito mais amplo do que aquele da filosofia da matemática.

Assim, numa versão daquilo que foi referido acima como uma visão científica de mundo, herdeira do positivismo lógico, nossa única fonte de conhecimento é a percepção sensível. Não existe nenhuma forma puramente racional de conhecimento da realidade, seja qual for. Junto desta tese epistemológica, viria também uma tese ontológica. A realidade seria completamente descrita e explicada pelas ciências empíricas, em especial a física. Se toda a realidade é aquela descrita pela física, então não existe nada além do mundo físico: não existem objetos abstratos para serem conhecimento. Teríamos uma combinação de empirismo e nominalismo, sua contraparte ontológica.[3]

3 Este tipo de visão de mundo é uma tendência dominante na filosofia analítica contemporânea. Uma de suas formas é o naturalismo filosófico que, como definido por Quine, consiste no "[…] reconhecimento de que é dentro da própria ciência [natural], e não em alguma filosofia prévia, que a realidade deve ser identificada e descrita." (QUINE, 1981, p. 21). Ressalta-se, porém, que Quine não é um nominalista. Devido ao papel desempenhado pela matemática na física e pelos compromissos ontológicos da matemática com conjuntos, ele aceita entes abstratos, ainda que relutante-

Ora, é claro que esta concepção é ameaçada, em ambos os aspectos, pelo entendimento padrão, intuitivo, de matemática. Se este último é correto, então existem objetos abstratos, e existe um conhecimento puramente racional deles: nem a realidade se restringiria ao mundo físico, nem nosso conhecimento ao conhecimento empírico.[4] Assim, alguém que pretende argumentar contra o nominalismo e o empirismo pode apelar para a matemática, defendendo que ali temos um domínio de entes abstratos e de verdades conhecidas *a priori*, similar ao que Kant fez contra Hume (cf. *KrV*, B20). O defensor do empirismo e do nominalismo se vê obrigado a fornecer uma filosofia da matemática que represente uma alternativa viável à concepção padrão ou, no mínimo, a apresentar bons argumentos contra ela. Em particular, é necessário explicar o significado dos enunciados matemáticos: o que queremos dizer quando dizemos, por exemplo, “7 > 5”, já que não estaríamos falando sobre os números 7 e 5? O que significaria dizer que este enunciado é verdadeiro, dado que, como empiristas e nominalistas, não podemos dizer que ele é verdadeiro porque descreve como *realmente* se relacionam os números (entes abstratos) 7 e 5?

Bem como a matemática traz sérios problemas para posições empiristas e nominalistas, ela também o faz para as posições contrárias, o platonismo – a tese metafísica segundo a qual existem objetos abstratos – e alguma forma de não-empirismo ou racionalismo. Quem assume a concepção padrão assume com ela a existência de entes abstratos platônicos e assume também que temos conhecimento acerca deles. Contudo, não podemos simplesmente aceitar que existem entes abstratos porque os enunciados matemáticos pareceriam falar acerca deles. É necessário fornecer alguma

mente. Sobre as concepções ontológicas de Quine, cf. CHATEAUBRIAND, 2003.

4 Uma descrição dos problemas trazidos pela matemática para o empirismo e do papel do logicismo do final do século XIX e início do século XX na tentativa de superação destas dificuldades, encontra-se em: SCHWARTZ, 2012, p. 13 e sgts.

explicação sobre que entes são estes e dar algum argumento adicional a favor de sua existência. É preciso mostrar que é de alguma forma necessário assumir que existem entes abstratos, pois se fosse possível fazer matemática sem assumir sua existência, teríamos nisso um argumento contra o platonismo: na falta de boas razões para aceitar a existência de entes de um determinado tipo, concluímos que eles não existem. Além disto, é necessário explicar como podemos conhecê-los, isto é, como podemos ter o conhecimento matemático que possuímos.

2 O dilema de Benacerraf

O modo contemporâneo de articular o problema filosófico sobre a matemática no contexto filosófico mais amplo se deve, em grande medida, a um artigo de Paul Benacerraf. O artigo em questão, "Mathematical Truth", foi publicado em 1973, embora estivesse circulando informalmente no meio filosófico norte-americano desde fins da década de 1960, e foi responsável por uma verdadeira explosão de trabalhos e debates filosóficos sobre a matemática desde sua publicação.[5] O que há de especial nele vem à tona tão logo descrevemos rapidamente sua argumentação.

"Mathematical Truth" formula dois requerimentos sobre uma concepção de verdade matemática. O primeiro diz que uma boa explicação do conceito de verdade aplicado a enunciados matemáticos requer que estes sejam interpretados como falando acerca de objetos abstratos como números, funções, conjuntos, figuras geométricas, etc. O segundo afirma que uma explicação da verdade matemática deve também

5 Uma descrição da história de circulação e publicação do artigo encontra-se em: BENACERRAF, 1995, pp. 10-11. Sobre o legado filosófico de "Mathematical Truth", cf. MADDY, 1995. Uma introdução acessível aos debates resultantes deste artigo encontra-se em: PANZA & PERINI, 2013, cap. 3, 4 e 5.

explicar, ou ao menos nos permitir explicar como podemos ter conhecimento matemático. Uma boa explicação do conhecimento matemático, por sua vez, requer uma explicação de qual é a relação entre nós e os objetos matemáticos que nos permite conhecê-los, i. e., deve dizer quais são os meios que nos permitem adquirir conhecimento matemático. Segue dizendo o argumento do artigo que, enquanto temos a percepção sensível como uma relação com objetos concretos que nos permite conhecê-los, pareceria não haver nenhuma relação entre nós e objetos abstratos que cumprisse a mesma função. Para dar conta do conhecimento matemático teríamos, então, que recusar a tese de que a matemática trata de objetos abstratos. Assim, surge um dilema: ou assumimos objetos abstratos e damos conta da verdade matemática, mas falhamos em explicar como o conhecimento matemático é possível; ou negamos que a matemática trata de objetos abstratos, mas falhamos em dar conta da verdade matemática.

Esta é uma descrição superficial do dilema, mas já deixa antever um aspecto fundamental. O problema posto pela argumentação de Benacerraf pertence, sem dúvida, à filosofia da matemática. Porém, sua importância não se restringe a esta área, envolvendo também problemas centrais e tradicionais de semântica, metafísica e epistemologia. Em especial, o dilema articula, ao redor da questão sobre verdade matemática, uma série de discussões acerca da legitimidade de objetos abstratos, da possibilidade de termos conhecimento destes objetos e, também, da natureza do conhecimento, em particular, do conhecimento *a priori*. Esta conexão se torna clara ao consideramos em mais detalhes a formulação do dilema.

O dilema de Benacerraf, em sua formulação original, parte da caracterização de dois tipos de concepções ou abordagens sobre verdade matemática, noção central de alguns dos principais debates filosóficos sobre esta disciplina no século XX.[6] A primeira dessas abordagens é aquela que descrevemos na seção anterior: a concepção padrão, platonista, de matemática. Ela parte de uma premissa semântico-ontológica. Assim como o enunciado "Fortaleza é maior que Sobral" fala acerca das cidades de Sobral e Fortaleza, dizendo que elas mantêm uma determinada relação, e é verdadeira porque elas mantêm realmente a relação descrita no enunciado, também "7 > 5" falaria sobre os números 7 e 5, dizendo que eles mantêm uma relação, e é verdadeiro porque estes números realmente mantêm a relação descrita. Enunciados empíricos descrevem a realidade concreta, e é esta realidade que determina se são verdadeiros ou não. Enunciados matemáticos descreveriam uma realidade abstrata, suprassensível, e seriam verdadeiros ou não dependendo dessa realidade (BENACERRAF, 1973, pp. 663-4, 668).

O outro tipo de abordagem é motivado por considerações epistemológicas e Benacerraf as chama de concepções combinatoriais. Nelas, enfatizam-se os métodos de justificação utilizados na matemática como determinantes da verdade, especialmente os procedimentos de prova. Mas, além disso, recusam-se entes abstratos e, portanto, recusa-se também a interpretação de enunciados matemáticos como similares aos empíricos como descrita acima. A verdade matemática não é mais entendida em termos de referência a objetos platônicos, como dependendo de uma realidade abstrata, extrassensível. A ideia central destas concepções é que a verdade é atribuída a enunciados matemáticos em virtude de suas características sintáticas, como, por exemplo, sua derivabilidade formal a partir de axiomas (*Ibidem*, p. 665).

Se excluirmos de consideração aquelas concepções que tomam as afirmações matemáticas como se referindo aos próprios signos concretos, que limitariam a disci-

6 Sobre isso, veja a primeira versão do artigo: BENACERRAF, 1968, p. 263 e sgts.

plina à metamatemática e à sintaxe, então temos duas opções mutuamente exclusivas e totalmente abrangentes.[7] De um lado, estão as abordagens que caracterizam verdade matemática em termos de referência e de uma ontologia platonista, de outro, temos concepções que se negam a entender a verdade matemática desta forma, não há terceira opção. O principal ponto de discórdia entre elas seria a aceitação ou negação de uma ontologia platonista, de entes abstratos. Já aqui temos o problema da verdade matemática relacionado com outro muito mais amplo, a questão ontológica sobre que tipo de entes existem. O passo seguinte do dilema consiste em formular duas demandas a serem satisfeitas por uma teoria da verdade matemática, através dos quais o problema de filosofia da matemática é, então, inserido no contexto de discussões semânticas e epistemológicas.

O primeiro requerimento é semântico, acerca da noção de verdade matemática e pode ser formulado, de uma maneira simples, da seguinte forma: não há tal coisa como verdade matemática e verdade não matemática, como se existisse um conceito de verdade que se aplicasse somente a enunciados matemáticos e outro aos demais enunciados. O predicado "X é verdadeiro" significa a mesma coisa tanto em sua aplicação matemática quanto em sua aplicação a outras áreas de conhecimento. Sendo assim, requer-se que uma teoria da verdade para enunciados matemáticos seja homogênea com uma teoria de verdade para os enunciados não matemáticos: o conteúdo do conceito de verdade deve ser o mesmo em ambos os casos. Na prática, e esta é uma ideia por trás do requerimento, busca-se que o conceito de verdade matemática

7 Metamatemática é o estudo das teorias matemáticos usando os métodos da própria matemática. Um aspecto problemático destas concepções, que as retiram de consideração, são suas implicações ultrafinitistas: se a matemática fala acerca de signos concretos, então existem apenas finitamente muitos objetos matemáticos. A totalidade dos números naturais, por exemplo, não seria sequer potencialmente infinita, mas limitada, na melhor das hipóteses, à quantia de partículas no universo. Isso fica muito aquém do que se costuma aceitar em matemática.

esteja em conformidade com uma teoria geral, abrangente, sobre o conceito de verdade ou, como formula Benacerraf, que "[…] qualquer teoria da verdade matemática deve estar em conformidade com uma teoria *geral* da verdade […]" (BENACERRAF, 1973, p. 666, ênfase minha).

O segundo requerimento de Benacerraf é epistemológico: uma teoria da verdade matemática deve ser compatível com o fato de que conhecemos algumas verdades nesta área. Parte-se aqui de duas suposições. A primeira é que, de fato, possuímos conhecimento matemático. A segunda é que esse conhecimento é proposicional, i. e., conhecimento de verdades: nós sabemos que certos enunciados matemáticos são verdadeiros. Supondo isto, uma concepção de verdade matemática que excluísse a possibilidade de conhecermos a verdade de enunciados seria claramente insustentável. Portanto, uma concepção de verdade deve ser ao menos compatível com uma explicação de como podemos possuir o conhecimento matemático que de fato possuímos. Está em jogo a ideia de que uma teoria da verdade matemática deve "[…] se encaixar em uma concepção *abrangente* de conhecimento" (*Ibidem,* p. 667, ênfase minha, novamente). O dilema formulado mostra, então, que uma concepção de verdade matemática ou satisfaz o requerimento epistemológico, mas falha com o semântico, ou vice-versa.

As concepções combinatoriais, ao pensar a verdade matemática em termos de provas, podem explicar nosso conhecimento matemático em termos da habilidade de produzir provas e checar se elas estão corretas (*Ibidem,* p. 668). Contudo, estas concepções falham em produzir uma explicação da verdade matemática que se enquadre em uma concepção abrangente de verdade. Benacerraf considera como única opção viável de teoria da verdade aquela de Tarski, que explica as condições de verdade das sentenças em termos de referência, predicação, satisfação, e quantificação (*Ibidem,*

p. 677). Segundo ela, por exemplo, um enunciado simples como "Sócrates é sábio" é verdadeiro porque a referência do nome "Sócrates" satisfaz o predicado "x é mortal". Na medida em que as teorias combinatórias entendem verdade matemática em termos de provas, recusando a referência a objetos abstratos, elas recusam também definições de verdade (e de condições de verdade) em termos de referência e satisfação. Portanto, a verdade de enunciados empíricos seria entendida de modo distinto dos enunciados matemáticos e não seria nada claro se o conceito de verdade matemática, entendido em termos sintáticos, de provas matemáticas, não seria verdade só no nome. Em outras palavras, o problema é que "verdade" aplicada a enunciados empíricos seria algo diferente de "verdade" aplicada ao caso matemático: teríamos a mesma palavra, mas conceitos distintos (BENACERRAF, 1973, p. 677).

A concepção padrão cumpre facilmente com o requerimento semântico: ela é caracterizada por interpretar os enunciados matemáticos em termos da referência a objetos abstratos. Justamente por isto, ela falharia com o requerimento epistemológico. Uma boa teoria do conhecimento, segundo Benacerraf, seria "uma teoria causal do conhecimento na qual a explicação de que X sabe S requer que alguma relação causal se obtenha entre X e os referentes dos nomes, predicados e quantificadores de S" (*Ibidem*, p. 671). Como entes abstratos não participam de relações causais, a concepção padrão descreveria as condições de verdade de enunciados matemáticos "[…] em termos de condições sobre objetos cuja natureza [abstrata], como normalmente concebida, coloca-os além do alcance de meios de cognição humana mais bem compreendidos (por exemplo, percepção sensível e similares)." (*Ibidem*, p. 668).

Se as concepções combinatoriais falham o requerimento semântico por não se adequarem à teoria tarskiana da verdade, a concepção padrão falha a demanda epistemológica por não se adequar a uma teoria causal do conhecimento. Dado que entes abstratos se caracterizam por serem não causais, então é claramente impossível para a concepção padrão se adequar a uma teoria causal do conhecimento. Ela seria incapaz de fazer a ponte entre os objetos sobre os quais falam os enunciados matemáticos e nós, seres humanos com as capacidades e limitações cognoscitivas que possuímos (BENACERRAF, 1973, p. 675).

A situação na qual Benacerraf nos coloca então é a seguinte: para cumprir o requerimento semântico, é necessário admitir que a verdade de enunciados matemáticos envolve referência a objetos abstratos. O próprio caráter das concepções combinatoriais as impediriam de cumprir esta demanda. Teorias que seguem as linhas da concepção padrão cumprem o requerimento semântico. Contudo, justamente por isto, falham em cumprir com a demanda epistemológica: não seríamos capazes de explicar como possuímos o conhecimento matemático que possuímos.

3 Filosofia da Matemática, Filosofia

Quando Kant descreve a matemática como paradigma de conhecimento *a priori* comparando-a com a metafísica, ele situa problemas de filosofia da matemática como fundamentais para uma concepção do conhecimento *a priori*, do *problema geral da razão pura*, nas palavras dele. Compreender a natureza e possibilidade desse tipo de conhecimento seria, em boa medida, compreender a possibilidade e natureza do conhecimento matemático. Com isto, o problema filosófico da matemática deixa os confins da filosofia da matemática e passa para uma posição central dentro da investigação filosófica, ao se relacionar com a pergunta sobre a natureza e os limites do conhecimento.

No final do século XIX e início de século XX, a teoria kantiana do *a priori* foi sendo aos poucos destruída através de desenvolvimentos da matemática e de reflexões filosóficas acerca desta disciplina. Por um lado, temos a eliminação gradativa do papel da intuição dentro desta disciplina e sua ampliação, por meio da teoria dos conjuntos e das geometrias não euclidianas, para além dos limites do que poderia ser considerado conhecimento intuitivo.[8] Por outro lado, e conectado com isto, temos o advento do logicismo, principalmente pelas obras de Frege e Russel. O objetivo do projeto logicista era mostrar, contra Kant, que a aritmética era analítica, sendo derivável da lógica.[9] Embora tenha fracassado em sua forma mais forte, que pretendida mostrar que os axiomas e conceitos matemáticos eram todos deriváveis de princípios e conceitos puramente lógicos, obteve sucesso em mostrar que o raciocínio matemático era puramente lógico. A partir deste sucesso parcial, o positivismo lógico, nos anos 1920-1930, apropriou-se da tese de origem wittgensteiniana segundo a qual enunciados analíticos são verdadeiros em virtude do significado, de modo que, sendo o significado algo convencional, veio a defender que os enunciados matemáticos eram verdadeiros puramente em virtude das convenções que regem o uso dos signos envolvidos.[10]

Com a concepção positivista lógica da matemática como verdadeira por convenção, desaparecia o problema filosófico sobre a matemática. A matemática não representaria nenhum tipo especial de conhecimento *a priori*, como pensava Kant, nem descrevia nenhuma realidade suprassensível de números, funções e conjuntos. Ape-

8 Para uma exposição breve e introdutória de alguns destes desenvolvimentos, veja: SILVA, 2007, pp. 110-121. Um tratamento muito mais extenso e aprofundado do tema encontra-se em: GRATTAN-GUINESS, 2000.

9 Sobre o logicismo, há uma exposição introdutória em: SILVA, 2007, cap. 3.

10 O desenvolvimento da teoria do *a priori*, de Kant até o positivismo lógico, é retraçada em: COFFA, 1991, especialmente p. 306 e sgts.

nas tratava-se do conhecimento de convenções linguísticas e suas consequências. Desapareciam, desta forma, as conexões entre problemas de filosofia da matemática e questões centrais filosóficas: o problema geral da razão pura recebia uma simples resposta negativa. Esta era a situação na época na qual Benacerraf escreveu “Mathematical Truth”, onde ele apresenta seu dilema, isto é, na virada das de 1960-1970.[11] Nesta mesma época, porém, a concepção positivista já vinha sofrendo o que viriam a ser ataques definitivos, especialmente da parte de Quine, questionando a ideia de verdade por convenção e a distinção entre analítico e sintético.[12] E o próprio dilema de Benacerraf também representa um ataque adicional a esta teoria convencionalista da verdade matemática, que se enquadra dentro das abordagens combinatoriais.[13]

Neste contexto filosófico mais amplo, o que o dilema faz é trazer de volta os questionamentos sobre a matemática a um lugar de destaque dentro do debate filosófico, como havia ocorrido com Kant. Porém, os termos nos quais se dá esse retorno são distintos. Da perspectiva do dilema, parte do problema colocado pela matemática é, como na citação de Linnebo dada anteriormente, conciliar o tipo de conhecimento *a priori* dessa disciplina com uma “visão de mundo” científica em sentido amplo, que concebe todo conhecimento como tendo sua origem na percepção sensível, e toda a realidade como sendo realidade física. De modo geral, isto também inclui a crença de que a teoria da verdade de Tarski fornece o caminho seguro para uma semântica filosófica rigorosa. Em boa medida, esta “visão de mundo”, dominante no ambiente filosófico analítico, é herdada do positivismo lógico e envolve respostas específicas para

11 Uma descrição vívida e pessoal deste contexto filosófico encontra-se em: BENACERRAF, 1996, pp.11-13. Lembramos que uma primeira versão do artigo estava pronta e circulava informalmente já em 1968. A publicação do artigo, em sua versão definitiva, se deu em 1973.
12 Refiro-me aos artigos: QUINE, 1939; QUINE, 1948.
13 Cf. BENACERRAF, 1973, pp. 676-679.

três grandes problemas filosóficos: as fontes ou origens do conhecimento, a pergunta pelo significado e pela verdade e a questão sobre o que existe.

Visto como propomos acima, o dilema serve como um ponto de apoio para a formulação de problemas acerca da matemática que possuem consequências filosóficas muito mais gerais. Assim, para posições empiristas e nominalistas, o dilema coloca a questão sobre como formular uma teoria da verdade capaz de abranger enunciados matemáticos e não matemáticos respeitando a ideia de que a verdade de enunciados empíricos depende da realidade sem assumir que enunciados matemáticos são verdadeiros acerca de entes abstratos fora do alcance da percepção sensível. Se empirismo e nominalismo são posições viáveis dependerá de serem capazes de fornecer uma teoria filosófica viável sobre a matemática. De modo, similar, o dilema coloca um problema central para o platonismo metafísico que não se restringe à filosofia da matemática, a saber, aquele sobre como poderíamos ter acesso epistêmico a entes abstratos. Também a viabilidade do platonismo, e da epistemologia e semântica associadas a ele, depende de sua capacidade de responder ao dilema.

Os requerimentos formulados por Benacerraf, de que uma teoria da verdade matemática deve se enquadrar em teorias abrangentes sobre verdade e conhecimento, mostram-se também como requerimentos para teorias da verdade e do conhecimento de um modo geral. O que eles também requerem é que estas teorias sejam capazes de acomodar uma teoria da verdade matemática. Subjazendo ambos os requerimentos, por sua vez, temos outra questão filosófica central, aquela sobre o que existe. No final das contas, são as posições acerca desta questão que determinarão qual lado do problema teremos que enfrentar.

4 Considerações finais

Em um entendimento superficial, a filosofia da matemática ocuparia apenas um lugar à margem das discussões filosóficas. Contudo, uma visão mais cuidadosa do assunto mostra que a reflexão sobre a matemática fornece elementos importantes para discussões filosóficas centrais. Procurei tornar isto mais claro introduzindo o dilema de Benacerraf, apresentado em "Mathematical Truth". O argumento do artigo é dirigido a concepções de verdade matemática, distinguindo duas abordagens básicas a este conceito, formulando duas demandas, uma semântica e outra epistemológica, e defendendo que nenhuma das abordagens é capaz de cumprir ambas as demandas. Uma das abordagens, a concepção padrão, cumpre facilmente o requerimento semântico, mas falha diante do epistemológico. As outras abordagens cumprem o requisito epistemológico, mas falham diante do semântico.

Os problemas com as abordagens padrão e combinatoriais dizem respeito ao fato de elas não serem conciliáveis com teorias epistemológicas e semânticas abrangentes, o que é resultado das posições ontológicas envolvidas nestas abordagens. Invertendo a situação, o dilema nos mostraria que não possuímos uma teoria *geral* do conhecimento capaz de abarcar a concepção padrão de matemática, explicando como o conhecimento matemático é possível, nem temos uma teoria *geral* da verdade capaz de acomodar a concepção combinatória de verdade matemática. Visto desta forma, o argumento traz o conceito de verdade matemática como um problema não só de filosofia da matemática, mas também de teorias gerais do conhecimento e da verdade resultantes das suposições ontológicas envolvidas. Assim, a reflexão filosófica sobre a matemática se mostra, através do dilema de Benacerraf, como um ponto onde se articulam problemas epistemológicos, semânticos e ontológicos de importância filosófica fundamental, que ultrapassam os limites da filosofia da matemática.

Referências bibliográficas

BENACERRAF, P. [1968] Mathematical Truth (1968 version). *In*: PATAUT, F. (ed.) *Truth, Objects, Infinity: New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf.* S/l: Springer, 2016.

BENACERRAF, P. Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, Nova Iorque (NY), vol. 70, n. 19, pp. 661-679, nov. 1973.

BENACERRAF, P. What Mathematical Truth Could Not Be – I. *In:* MORTON, A. e STICH, S. P. (Eds). *Benacerraf and its Critics*. Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers, 1996, pp. 9-59.

CHATEAUBRIAND, O. Quine and Ontology. *Principia*, Florianópolis, vol. 7, n. 1-2, pp. 41–74, 2003.

COFFA, A. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: to the Vienna Station.* Edited by Linda Wessels. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

GRATTAN-GUINESS, I. *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940: Logics, Set Theories, and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton: University Press, 2000.

KANT, I. [1787] *Crítica da Razão Pura*. 6ª ed. Trad. de Manuela P. dos Santos e Alexandre F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

LINNEBO, O. *Philosophy of Mathematics*. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2017.

MADDY, P. The Legacy of "Mathematical Truth". *In:* MORTON, A.; STICH, S. P. (Eds). *Benacerraf and its Critics*. Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers, 1996, pp. 60-72.

MORTON, A.; STICH, S. P. (Eds). *Benacerraf and its Critics*. Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers, 1996.

PANZA, M.; PERINI, A. *Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism.* New York: Palgrave Macmillan, 2013.

QUINE, W. O. [1936] Truth by Convention. *In:* QUINE, W. O. *Philosophical Essays for A. N. Whitehead*. Edited by O. H. Lee. New York: Longmans, 1936, pp. 90-124.

QUINE, W. O. Two Dogmas of Empiricism. *In:* QUINE, W. O. *The Philosophical Review*, Durham (NC), vol. 60, n. 1, pp. 20-43, jan. 1951. Tradução para o português: QUINE, W. O. *De um ponto de vista Lógico.* São Paulo: Editora UNESP, 2011, pp. 37-72.

QUINE, W. O. Things ant their Place in Theories. *In:* QUINE, W. O. *Theories and Things.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981, pp. 1-23.

SCHWARTZ, S. P. [2012] *Uma breve história da filosofia analítica: de Russell a Rawls*. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

SHABEL, L. Kant's Philosophy of Mathematics. *In:* ZALTA, N. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition). Website: https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/kant-mathematics/. Acessado em: maio de 2019.

SILVA, J. J. da. *Filosofias da matemática.* São Paulo: Editora UNESP, 2007.